Can strategizing in round-robin subtournaments be avoided?

By Marc Pauly

Юлия Веселова

Семинар «Экономика футбола»

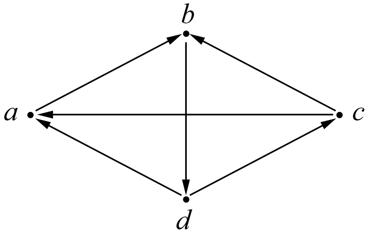
18 марта 2014

Введение

- В 2012 на олимпиаде в Лондоне 8 женских команд по бадминтону были дисквалифицированы.
- Причина дисквалификации в том, что команды старались не выиграть, а проиграть один из матчей.
- Их поведение объясняется правилами игры, которые увеличивают шансы выиграть золотую медаль в случае проигрыша в данном раунде.
- Задача статьи - предложить правило соревнований, при котором оптимальной стратегией для игроков было бы выигрывать все матчи.

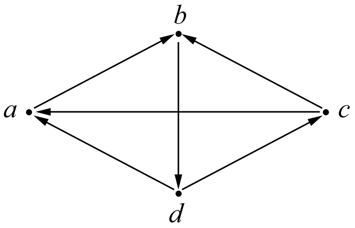
Определения и обозначения

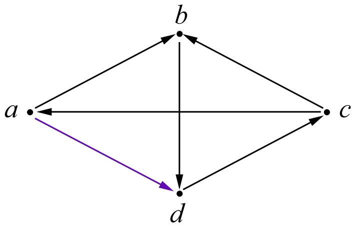
- X - множество игроков (команд)
- Турнир на множестве X - любое множество $T \subseteq X \times X$ такое, что (1) Из $\forall x, y \in X, (x, y) \in T$ следует $(y, x) \notin T$; (2) $\forall x, y \in X$, если $x \neq y$, то $(x, y) \in T$ или $(y, x) \in T$.
- Если $(x, y) \in T$, это значит "x выигрывает у y".
- T_X - множество всех турниров на X.



Свойства

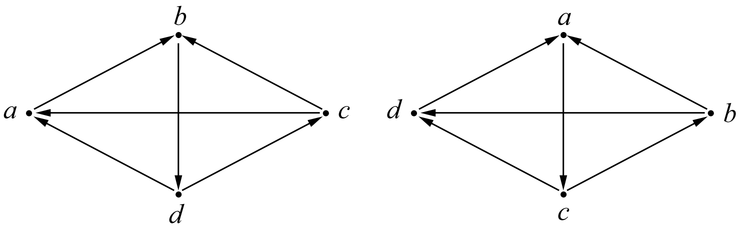
- Два турнира $T, T' \in \mathcal{T}_X$, команда $a \in X$. T' *монотонно улучшает* T для a, $T' \geq_a T$, если и только если $\forall x, y \in X$
  (1) если $x \neq a$ и $y \neq a$, то $(x, y) \in T \iff (x, y) \in T'$;
  (2) если $(a, x) \in T$, то $(a, x) \in T'$.





Свойства

Турниры $T, T' \in \mathcal{T}_X$ *идентичны для* Y, если $\forall x, y \in Y$ $(x, y) \in T \iff (x, y) \in T'$.Турниры $T, T' \in \mathcal{T}_X$ *изоморфны*, если $\exists \pi$ на X, что $\forall x, y \in X, (x, y) \in T \iff (\pi(x), \pi(y)) \in T'$.



Свойства

Правило соревнований - функция $F : X^n \times T_X \to X$.

- **Независимость от посторонних альтернатив** (Independance of irrelevant alternatives, IIR): $\forall x_1, ..., x_n \in X$ и $\forall T, T' \in T_X$, т.ч. $T =_{\{x_1,...,x_n\}} T'$, выполнено $F(x_1, ..., x_n, T) = F(x_1, ..., x_n, T')$.
- **Выбор из множества ввода** (Input-selection): $\forall x_1, ..., x_n \in X$ и $\forall T \in T_X$ выполнено $F(x_1, ..., x_n, T) \in \{x_1, ..., x_n\}$.
- **Монотонность**: $\forall a, x_1, ..., x_n \in X$ и $\forall T, T' \in T_X$, если $F(x_1, ..., x_n, T) = a$ и $T' \geq_a T$, то $F(x_1, ..., x_n, T') = a$
- **Анонимность**: если T и T' изоморфны относительно π, то $\pi(F(x_1, ..., x_n, T)) = F(\pi(x_1), ..., \pi(x_n), T')$.
- **Симметричность**: правило соревнований арности $2n$ называется симметричным, если и только если $\forall x_1, ..., x_{2n} \in X$ и $\forall T \in T_X$ выполнено
  $F(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}, T) = F(x_{n+1}, ..., x_{2n}, x_1, ..., x_n, T)$.
- **Non-imposedness**: $\forall a, x_1, ..., x_n \in X$ и $\forall i \leq n$ существует такое $T \in T_X$, что $F(x_1, ..., x_n, T) = x_i$.

Свойства

- Если правило соревнований использует несколько турниров, $F : X^n \times (T_X)^m \to X$, то оно называется монотонным, если и только если $\forall a, x_1, ..., x_n \in X$ и $\forall T_1, ..., T_m, T'_1, ..., T'_m \in T_X$, если $F(x_1, ..., x_n, T_1, ..., T_m) = a$ и $T'_i \geq_a T_i$, то $F(x_1, ..., x_n, T'_1, ..., T'_m) = a$

Лемма 1

Лемма 1 Если $|X| \geq n+2$, то n-арное правило соревнований, которое является анонимным и независимым от посторонних альтернатив, удовлетворяет также свойству выбора из множества ввода.

Лемма 1

Лемма 1 Если $|X| \geq n+2$, то n-арное правило соревнований, которое является анонимным и независимым от посторонних альтернатив, удовлетворяет также свойству выбора из множества ввода.

Контрпример для $|X| = n+1$. Бинарная функция G на множестве a, b, c: $G(x_1, x_2, T) = x_1$, если $x_1 = x_2$, иначе $G(x_1, x_2, T)$ выбирает элемент, не равный x_1 или x_2. Функция удовлетворяет анонимности и независимости от посторонних альтернатив, но не удовлетворяет свойству выбора из множества ввода.

Основные правила соревнований

Круговой турнир Пусть функция $R^1_n : X^n \times T_X \to X$ возвращает победителя кругового турнира по правилу: Для каждого $Y \subseteq X, a \in X$ и $T \in T_X$, количество очков для a в T с ограничением на Y определяется как

$$score(a, Y, T) = |\{b \in Y | (a, b) \in T\}|.$$

$R^1_n(x_1, ..., x_n, T) = x_i$ если и только если i - наименьший индекс, для которого $score(x_i, \{x_1, ..., x_n\}, T) \geq score(x_j, \{x_1, ..., x_n\}, T) \forall j \leq n$.

Очевидно, $R^1_2(x_1, x_2, T) = T(x_1, x_2)$. Функция R^1_n удовлетворяет монотонности, независимости от посторонних альтернатив, выбору из множества ввода.

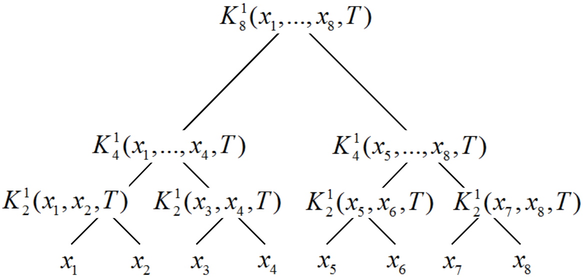
Круговой турнир

Второе место в круговом турнире определяется по правилу $R_n^2 : X^n \times T_X \to X$. $R_n^2(x_1, ..., x_n, T) = x_i$ если и только если существует такое k, что $R_n^1(x_1, ..., x_n, T) = x_k$, $k \neq i$ и i - наименьший индекс, для которого $score(x_i, \{x_1, ..., x_n\}, T) \geq score(x_j, \{x_1, ..., x_n\}, T) \forall j \neq k$.

Функция R_n^2 не монотонна, не симметрична.

Соревнования с выбыванием (Knock-out tournament)

Функция $K_n^1 : X^n \times T_X \to X$ определяется рекурсивно



$$K_8^1(x_1,\ldots,x_8,T) = R_2^1(K_4^1(x_1,\ldots,x_4,T),\ K_4^1(x_5,\ldots,x_8,T),\ T)$$

$$K_4^1(x_5,\ldots,x_7,T) = R_2^1(K_2^1(x_5,x_6,T),\ K_2^1(x_7,x_8,T),\ T)$$

$$K_4^1(x_1,\ldots,x_4,T) = R_2^1(K_2^1(x_1,x_2,T),\ K_2^1(x_3,x_4,T),\ T)$$

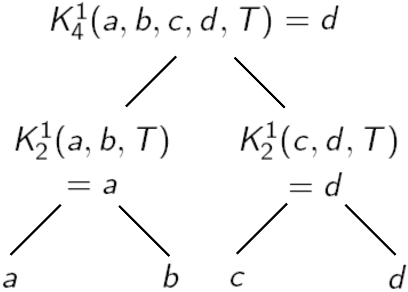
$$K_2^1(x_1,x_2,T) = R_2^1(x_1,x_2,T) = T(x_1,x_2)$$

$$\ldots$$

$$K_2^1(x_7,x_8,T) = R_2^1(x_7,x_8,T) = T(x_7,x_8)$$

Пример правила соревнований с выбыванием

Пример 1 $K_4^1(a,b,c,d,T) = R_2^1(K_2^1(a,b,T), K_2^1(c,d,T))$
$T \supseteq \{(a,b),(d,c),(d,a)\}$



$K_2^1(a,b,T) = T(a,b) = a$
$K_2^1(c,d,T) = T(c,d) = d$
$K_4^1(a,b,c,d,T) = R_2^1(a,d,T) = T(a,d) = d$

Пример правила соревнований с выбыванием

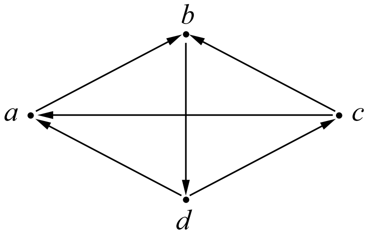
Пример 2 Рассмотрим множество $X = \{a, b, c, d\}$, турнир $T = \{(a, b), (b, d), (d, c), (d, a), (c, a), (c, b)\}$.

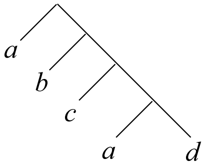
Правило соревнований $K_{16}^{1}(a, a, a, a, a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, a, d)$.

Пример правила соревнований с выбыванием

Пример 2 Рассмотрим множество $X = \{a, b, c, d\}$, турнир $T = \{(a, b), (b, d), (d, c), (d, a), (c, a), (c, b)\}$.

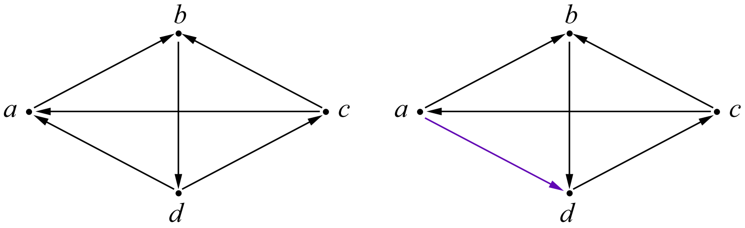
Правило соревнований $K^1_{16}(a, a, a, a, a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, a, d)$.





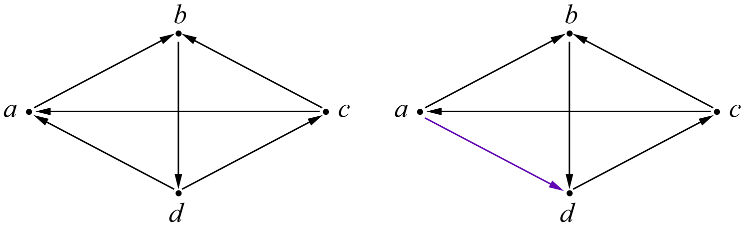
Пример правила соревнований с выбыванием

Заменим в T' пару (d, a) на (a, d). $T' \geq_a T$.



Пример правила соревнований с выбыванием

Заменим в T' пару (d, a) на (a, d). $T' \geq_a T$.



Но победитель соревнований будет c! Следовательно, правила соревнований с выбыванием не удовлетворяют свойству монотонности.

Примеры стратегического поведения в соревнованиях

Пример 1 Рассмотрим функцию

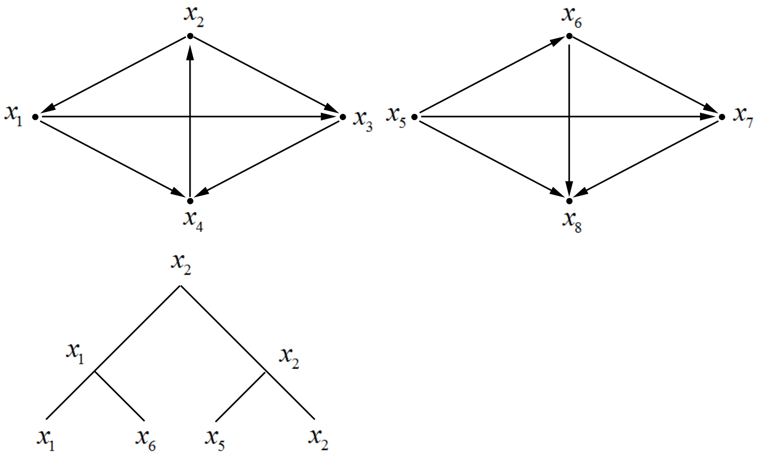
$$F(x_1, ..., x_8, T_1, T_2) = K^1(R^1(x_1, x_2, x_3, x_4, T_1), R^2(x_5, x_6, x_7, x_8, T_1), \\ R^1(x_5, x_6, x_7, x_8, T_1), R^2(x_1, x_2, x_3, x_4, T_1), T_2). \tag{1}$$

и турниры

$$T_1 \supseteq \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_2)\} \cup \\ \{(x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_7, x_8)\} \tag{2}$$

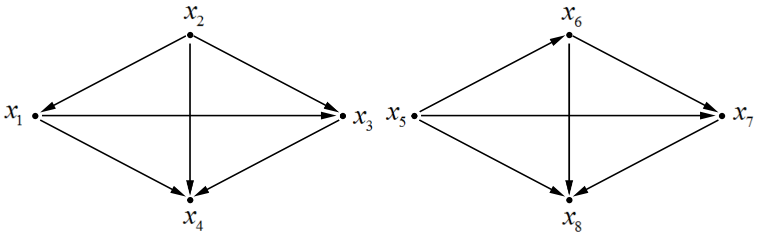
$$T_2 \supseteq \{(x_1, x_6), (x_2, x_5), (x_2, x_1), (x_6, x_2)\} \tag{3}$$

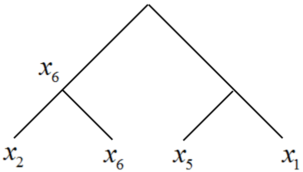
Примеры стратегического поведения в соревнованиях



Примеры стратегического поведения в соревнованиях

Теперь заменим в T_1 результат игры между x_2 и x_4. $T_1' \geq_{x_2} T_1$.





Примеры стратегического поведения в соревнованиях

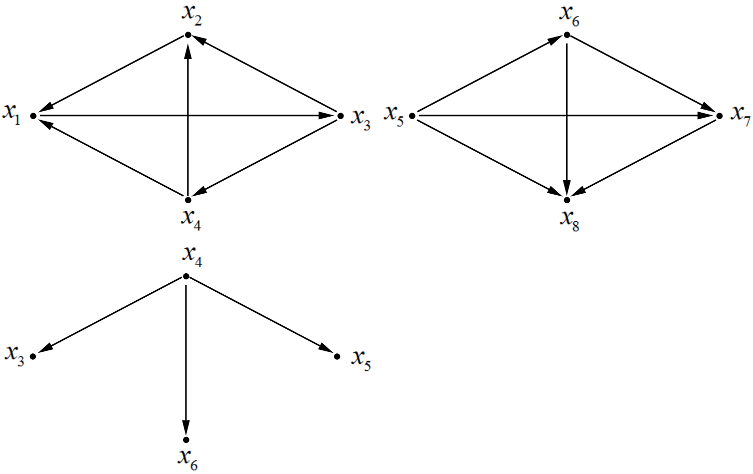
Пример 2 Рассмотрим функцию

$$F'(x_1, ..., x_8, T_1, T_2) = R^1(R^1(x_1, x_2, x_3, x_4, T_1), R^2(x_5, x_6, x_7, x_8, T_1), R^1(x_5, x_6, x_7, x_8, T_1), R^2(x_1, x_2, x_3, x_4, T_1), T_2). \quad (4)$$

$$T_1 \supseteq \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\} \cup \{(x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_7, x_8)\} \quad (5)$$

$$T_2 \supseteq \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_1, x_6)\} \cup \{(x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_4, x_6)\} \quad (6)$$

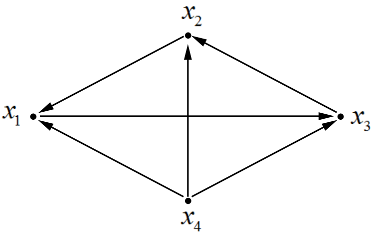
Примеры стратегического поведения в соревнованиях

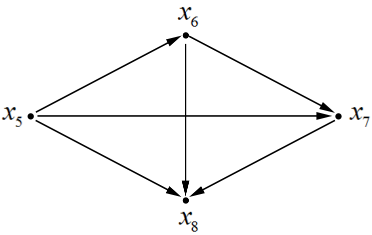


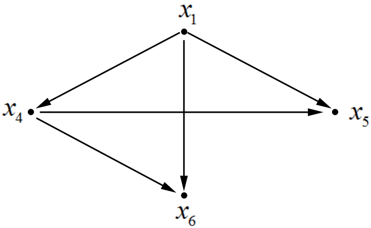
$F'(x_1, \ldots, x_8, T_1, T_2) = x_4$

Примеры стратегического поведения в соревнованиях

Заменим в T_1 результат игры между x_3 и x_4. $T_1' \geq_{x_4} T_1$.
Победитель $F'(x_1, \ldots, x_8, T_1', T_2) = x_1$





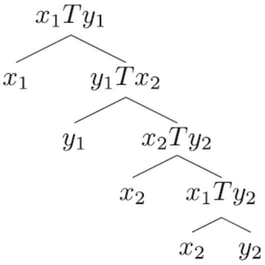


Монотонные правила соревнований

Вопрос: какие сложные правила соревнований будут неманипулируемыми (монотонными)? Авторами предложены фукнции, удовлетворяющие свойству монотонности.

$M : X^4 \times T_X \to X$ - "смешанная"функция (mix function).

x_1Ty_1	x_1Ty_2	x_2Ty_1	x_2Ty_2	$M(x_1, x_2, y_1, y_2, T)$
1	1	1	1	x_1
1	1	1	0	x_1
1	1	0	1	x_1
1	1	0	0	x_1
1	0	1	1	x_1
1	0	1	0	x_1
1	0	0	1	x_1
1	0	0	0	x_1
0	1	1	1	x_2
0	1	1	0	x_2
0	1	0	1	y_1
0	1	0	0	y_1
0	0	1	1	x_2
0	0	1	0	y_2
0	0	0	1	y_1
0	0	0	0	y_1



Монотонные правила соревнований

Функция M может быть использована для составления сложной функции правила соревнования.

$$\begin{aligned} C^i_j(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T) = M(&R^1(x_1, ..., x_i, T), R^2(x_1, ..., x_i, T), \\ &R^1(x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T), R^2(x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T), T). \end{aligned} \tag{7}$$

Монотонные правила соревнований

Функция M может быть использована для составления сложной функции правила соревнования.

$$C_j^i(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T) = M(R^1(x_1, ..., x_i, T), R^2(x_1, ..., x_i, T), \\ R^1(x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T), R^2(x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T), T). \quad (7)$$

C_j^i обладает свойством монотонности. Но!
(1) если соревнования доходят до игры между x_1 и y_2, то у x_1 нет стимулов играть хорошо.
(2) правило соревнований не является симметричным.

Лемма 2

Лемма 2 О свойствах правил соревнований (1 - правило обладает свойством, 0 - не обладает).

	R_n^1	R_n^2	K_n^1	M	C_j^i
IIR	1	1	1	1	1
Input-selecting	1	1	1	1	1
Anonymous	1	1	1	1	1
Symmetric	0	0	1	0	0
Non-imposed	1	1	1	1	1
Monotonic	1	0	0	1	1

Лемма 2

Лемма 2 О свойствах правил соревнований (1 - правило обладает свойством, 0 - не обладает).

	R_n^1	R_n^2	K_n^1	M	C_j^i
IIR	1	1	1	1	1
Input-selecting	1	1	1	1	1
Anonymous	1	1	1	1	1
Symmetric	0	0	1	0	0
Non-imposed	1	1	1	1	1
Monotonic	1	0	0	1	1

$\Rightarrow$ Вопрос: можно ли найти такое правило, в котором в второй раунд переходили бы *игроки, занявшие вторые места* в первом раунде, которое было бы *симметричным* и *неманипулируемым*?

Теорема о невозможности

Теорема 1 Если $|X| \geq 6$, то не существует функции $G : X^4 \times T_X \to X$, которая удовлетворяет свойствам симметричности, анонимности, non-imposedness, IIR и для которой функция

$$H_j^i(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T_A, T_B, T) = G(R^1(x_1, ..., x_i, T_A),\\ R^2(x_1, ..., x_i, T_A), R^1(x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T_B), R^2(x_{i+1}, ..., x_{i+j}, T_B), T) \tag{8}$$

монотонна для всех $i, j \geq 2$.

Заключение

- Рассмотрены примеры правил соревнований, при которых игрокам выгодно стратегическое поведение: проигрыш матча в этом случае приводит к лучшему результату соревнований.
- Для правила соревнований вводятся "хорошие"свойства, которым они должны удовлетворять.
- Расматриваются типичные правила соревнований, а также вводятся два новых правила, которые обладают свойством монотонности. Однако, исключают симметричность.
- Доказывается теорема о невозможности совмещения свойств симметричности, анонимности, non-imposedness, IIR и монотонности, если число участников соревнований превосходит 6.