Факультет прикладной политологии, 2012-13 уч. год
Алгебра и анализ
Лекция 5. Элементы теории вероятностей, часть 2 (16.10.2012)
И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов

1 Условная вероятность

Рассмотрим ситуацию. Во дворе играют 20 детей: 12 мальчиков и 8 девочек (см. табл. 1). Дети играют в футбол и в классики. В футбол играют 8 мальчиков и 2 девочки, в классики остальные ребята, т. е. 4 мальчика и 6 девочек. Выберем случайным образом ребенка среди играющих. С какой вероятностью он играл в футбол? Ответ следует непосредственно из определения вероятности:

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Теперь представим себе, что мы видим: выбранный случайным образом ребенок оказался мальчиком. С какой вероятностью он играл в футбол? Теперь изменилось и количество благоприятных исходов, и общее количество исходов.

$$p(F|M) = \frac{FM}{n(M)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

где $p(F|M)$ — вероятность того, что выбранный ребенок играет в футбол, при условии, что он оказался мальчиком, $n(FM)$ — количество мальчиков играющих в футбол, $n(M)$ — общее количество мальчиков. Посмотрим на наше вычисление внимательнее:

$$p(F|M) = \frac{\frac{n(FM)}{n(\Omega)}}{\frac{n(M)}{n(\Omega)}} = \frac{P(FM)}{P(M)}.$$

Здесь $p(FM)$ — вероятность того, что случайно взятый ребенок оказался мальчиком, играющим в футбол, $p(M)$ — вероятность того, что случайно взятый ребенок оказался мальчиком. Эту формулу можно воспринимать как определение *условной вероятности*: вероятностью события A при условии B называется отношение вероятности их одновременного выполнения к вероятности события B.

Важно не путать два понятия: вероятность одновременного выполнения двух событий и вероятность события A при условии B. Можно считать, что во втором случае мы рассматриваем не все элементарные исходы, а только те, что благоприятны B.

	классики	футбол	всего
девочки	6	2	8
мальчики	4	8	12
всего	10	10	20

Таблица 1: Дети во дворе

Пример 1. При бросании игральной кости события A — выпадение четного числа и B — выпадение числа, меньшего трех. Найдем вероятность события A при условии B, т. е. вероятность выпадения четного числа, при условии, что выпало меньше трех. Мы уже выяснили, что событие AB состоит в выпадении двойки, т. е. $p(AB) = 1/6$, $p(B) = 2/6 = 1/3$, тогда

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Случайное испытание: троекратное бросание монетки. Случайное событие A — выпадение хотя бы двух орлов и B — выпадение хотя бы одной решки. Найдем вероятность события A при условии B, выпадение хотя бы двух орлов при условии выпадение хотя бы одной решки. Мы уже выяснили, что событию AB благоприятствуют три элементарных исхода: «орел, орел, решка», «орел, решка, орел», «решка, орел, орел». Значит, $p(AB) = 3/8$, $p(B) = 7/8$. Итак:

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}.$$

Пример 3. Рассмотрим ситуацию: вы кидали монетку уже 3 раза, и каждый раз выпадал орел. С какой вероятностью и на четвертый раз снова выпадет орел? Орел четыре раза подряд выпадает достаточно редко, значит, сейчас скорее выпадет решка, чем орел, подсказывает нам интуиция. И ошибается! Действительно, вероятность события «выпали четыре решки подряд» составляет $1/16$, т. е. достаточно мала. Здесь благоприятным является единственный из 16 возможных исходов: РРРР, ОРРР, РОРР, РРОР, РРРО, ООРР, ОРОР, ОРРО, РООР, РОРО, РРОО, ОООР, ООРО, ОРОО, РООО, ОООО. Условная же вероятность события «в четвертый раз выпала решка», при условии «первые три раза выпадала решка» составит $1/2$, т. к. есть всего два равноправных исхода, в которых первые три раза выпадала решка. Здесь именно выполнение условия является редким событием, а не выпадение решки при условии уже выпавших трех.

2 Независимые события

События A и B называются *независимыми*, если вероятность события A не зависит от того, произошло B или нет. Формально: $p(A|B) = p(A)$.

Пример 4. Зависимы ли события «выбранный ребенок играет в футбол» и «выбранный ребенок — мальчик» из рассмотренного раньше примера?

Как мы посчитали раньше (см. таблицу 1):

$p(\Phi) = 10/20 = 1/2$,

$p(\Phi|M) = 8/12 = 2/3$,

$p(\Phi) \neq (\Phi|M)$ — значит, события зависимы. Это означает, что доля футболистов среди мальчиков больше, чем доля футболистов среди всех детей.

Пример 5. Зависимы ли события: A — выпадение четного числа при бросании игральной кости и B — выпадение числа, меньшего трех?

$p(A) = 3/6$,

$p(A|B) = 1/2$,

$p(A) = p(A|B)$ — значит, события независимы. Это означает, что доля четных чисел среди первых двух такая же, как и среди всех шести возможных.

Мы знаем, что: $p(A|B) = p(AB)/p(B)$. Значит, условие независимости событий можно записать так: $p(A) = p(A|B) = p(AB)/p(B)$. Откуда получаем:

$$p(AB) = p(A) \times p(B)$$

Это важное свойство независимых событий, мы называем его *теоремой о произведении вероятностей.*

Иногда вопрос о зависимости двух событий можно рассматривать как математическую задачку, как мы делали выше. Бывают же ситуации когда, наборот, из природы событий ясно, что они независимы, тогда их независимостью можно пользоваться для нахождения вероятности одновременного выполнения событий.

Пример 6. Монетку бросили три раза. С какой вероятностью выпало три решки? Эту задачу мы уже решили, подсчитав общее количество элементарных исходов и количество благоприятных исходов. Посмотрим теперь на этот вопрос так: интересующее нас событие A состоит в одновременном выполнении трех событий: B — в первый раз выпала решка, C — во второй раз выпала решка, D — в третий раз выпала решка. Эти события независимы (если, конечно, мы не заинтересованы в результате и бросаем монетку честно). Значит,

$$p(A) = p(BCD) = p(B) \times p(C) \times p(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Пример 7. Монетку бросили три раза. Найти вероятность события A — выпал хотя бы один орел. На первый взгляд, мы не можем применять в этой задаче соображения независимости событий, ведь «выпал хотя бы один орел» — это значит, что мог выпасть именно один орел, в любой из разов, могло выпасть два орла, могло выпасть три орла, т. е. само событие устроено сложно. В чем состоит дополнительное событие $B = \Omega \backslash A$? Другими словами, в каких случаях событие А не выполняется? Когда не выпало ни одного орла, т.е. выпали три решки. Вероятность этого события мы только что нашли: $p(B) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$. Значит, $p(A) = 1 - p(B) = 7/8$.