Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 1. Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными (25.01.2013)

И. А. Хованская, И. В. Щуров

Задача 1. [1, 2] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) равна x и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

(a) От каких параметров зависит модель?

Решение. Как нетрудно видеть, есть два параметра, определяющего, как будет меняться размер популяции — начальное число особей и скорость прироста.

(b) Рассматривая прирост популяции за некоторый интервал времени и устремляя этот интервал к нулю, вывести дифференциальное уравнение, решением которого является функция $x(t)$ — зависимость размера популяции от времени.

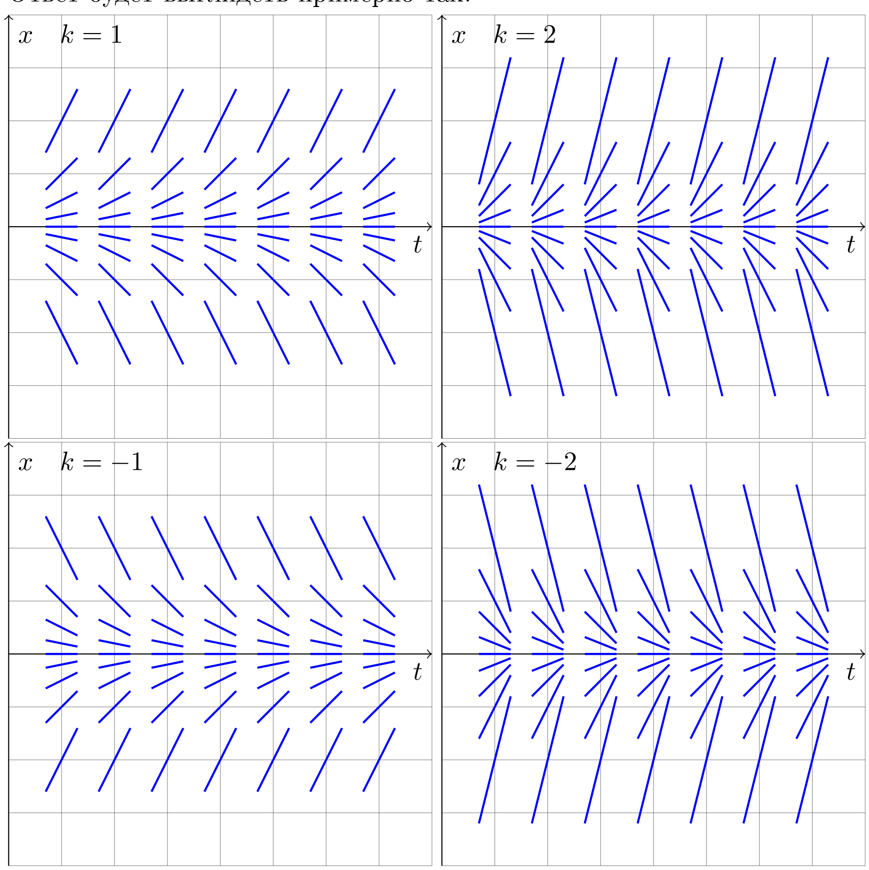
Решение. «Мгновенная скорость прироста» (скорость прироста за очень маленький интервал времени), по своему смыслу, это производная функции $x(t)$ по времени. Она обычно обозначается не штрихом, а точкой: $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}$. Из условия следует, что она пропорциональная самому размеру популяции, то есть

$$\dot{x} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности (то есть скорость прироста).

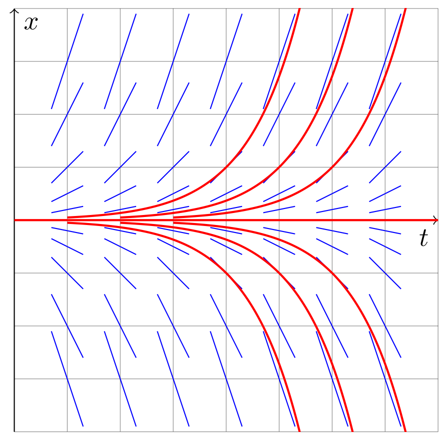
(c) Нарисовать поле направлений для найденного дифференциального уравнения.

Решение. Ответ будет выглядеть примерно так:



(d) Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?

Решение. Ответ будет выглядеть примерно так для $k = 1$:



(e) Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
Решение. Да, $x(t) \equiv 0$.

(f) Решить полученное дифференциальное уравнение: найти зависимость $x(t)$ явно.
Решение.

$$\frac{dx}{dt} = kx$$
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{kx}$$
$$t = \int \frac{dx}{kx}$$
$$kt = \ln|x| + C$$
$$|x| = e^{kt-C} = e^{-C}e^{kt} = C_1 e^{kt}, \quad C_1 > 0$$
$$x = C_2 e^t, \quad C_2 \neq 0$$

Первый переход является применением теоремы о производной обратной функции. При этом x становится независимой переменной, а t — неизвестной функцией, которая находится просто интегрированием правой части. Последний переход — раскрытие модуля, приводит к снятию ограничения со знака константы. Дополнительно необходимо учесть решение $x(t) = 0$, утерянное из-за деления на ноль на первом шаге. Итоговый ответ: $x(t) = Ce^{kt}$, C — любое.

(g) Пусть в начальный момент времени $t = 0$ размер популяции равен x_0. Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.
Решение. Ответ: $x(t) = x_0 e^{kt}$

Задача 2. [2], см. также [3].

Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Решить задачу 1 в этом случае. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести?

Задача 3. [2] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 1, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Решить для такой модели задачу 1. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

Задача 4. [4, 5] Согласно модели Солоу, прирост капиталовооруженности экономики k вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta k = sf(k) - \delta k, \tag{1}$$

где $f(k)$ — функция производства.

Записать дифференциальное уравнение для капиталовооруженности экономики в модели Солоу. Полагая $f(k) = \sqrt{k}$, решить для получившегося уравнения все пункты задачи 1, кроме 1f.

Задача 5. Решить следующие дифференциальные уравнения. Нарисовать интегральные кривые.

(a) $\dot{x} = \dfrac{x}{2t}$; (b) $\dot{x} = \dfrac{2x}{t}$; (c) $\dot{x} = \dfrac{x}{t}$; (d) $\dot{x} = -\dfrac{x}{t}$;

Список литературы

[1] Malthus *An Essay on the Principle of Population.* London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798

[2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[3] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia.* Science **132** (3436): 1291–1295.doi:10.1126/science.132.3436.1291

[4] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.

[5] О. Замулин, К. Сонин. *Макроэкономика.* Рукопись.