Кратчайшие

"Therefore, since brevity is the soul of wit
And tediousness the limbs and outward flourishes,
I will be brief."
W. Shakespeare, "Hamlet"

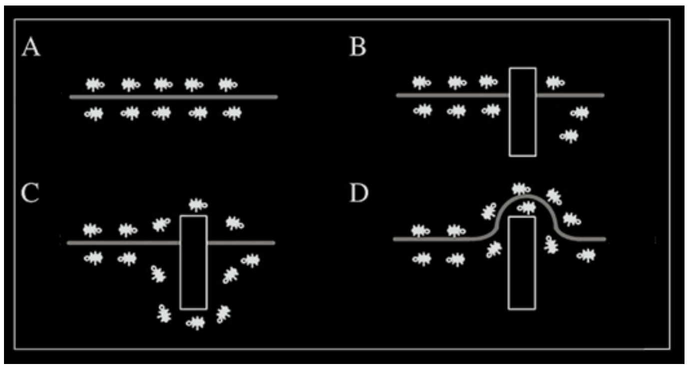

Рис. 1: Исследования показывают, что муравьи умеют искать кратчайшие. А вы?

A ⋄ 1 (Две деревни и река). Две деревни Вилларибо и Виллабаджо находятся с одной стороны от реки. Где наиболее удачно будет построить понтон для мытья посуды? Река протекает по прямой. Понтон для мытья посуды должен стоять на реке. А поскольку жители деревень часто ходят друг к другу в гости, то наиболее удачным считается то место, сумма расстояний от деревень до которого минимальна. Постройте явно эту точку. [1 балл]

A ⋄ 2 (Грузинские приключения Михаила Юрьевича). Михаил Юрьевич Лермонтов прогуливается по городу Мцхета, с двух сторон которого по прямым текут две реки - Арагва и Кура. Струи Арагвы и Куры сливаются, словно две сестры, в точке O. Михаил Юрьевич идет из бани в точке B в хинкальню в точке H, а по пути хочет полюбоваться на бурные воды рек, посетив сначала берег Арагвы, а потом берег Куры (см. Рис. 2). Какой путь выбрать поэту, чтобы он (путь, конечно) был наикратчайшим? Постройте такой путь явно. [1 балл]

A ⋄ 3 (Школьная геометрия). Треугольник XYZ, вершины которого суть основания высот треугольника ABC, называется *ортотреугольником* треугольника ABC. Докажите, что любые две стороны ортотреугольника образуют равные углы с прилегающей к ним стороне исходного треугольника, причем этот угол в точности равен углу исходного треугольника противолежащему этой стороне (см. Рис. 3). [1 балл]

A ⋄ 4 (Треугольник Шварца). Для данного остроугольного треугольника найдите другой вписанный в него треугольник так, чтобы его периметр был минимален. Треугольник называется *вписанным* в треугольник ABC, если три его вершины лежат на различных сторонах треугольника ABC. Что будет, если треугольник прямоугольный? А тупоугольный? [1 балл]

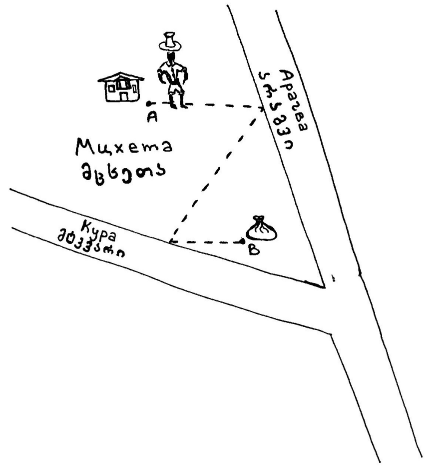

Рис. 2: Прогулка Михаила Юрьевича

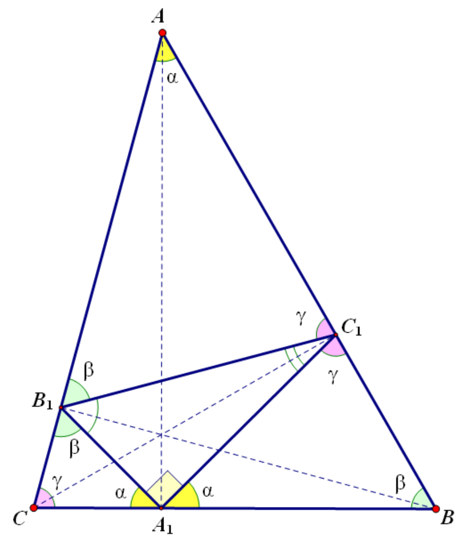

Рис. 3: Ортотреугольник

А ⋄ 5 (Важное свойство касательных эллипса). Эллипс определяется как множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных постоянна. Две данные точки называются *фокусами эллипса.* Докажите, что луч света, выпущенный из одного фокуса в любом направлении, отразившись от эллипса, попадет во второй фокус. [1 балл]

А ⋄ 6 (Минимальное расстояние до кривой). Пусть C — замкнутая выпуклая гладкая кривая на плоскости (можно представлять себе окружность, эллипс, овал). Пусть A — точка вне этой кривой. Докажите, что если из всех точек R на кривой C выбрать такую, что расстояние AR минимально, то отрезок AR окажется перпендикулярен касательной к кривой C в точке R. [1 балл]

А ⋄ 7 (Две деревни и озеро). Пусть теперь две деревни Виллларибо и Виллабаджо расположены вблизи озера, граница C которого есть замкнутая выпуклая гладкая плоская кривая. Докажите тогда, что если R — точка наиболее удачного расположения понтона для мытья посуды, то отрезки с одним концом в R, а другими — в точках расположения деревень образуют равные углы с касательной к кривой C в точке R. [1 балл]

А ⋄ 8 (*Prõvocõ* : Проблема Штейнера). Некогда берлинский математик 19 века Якоб Штейнер задумался: как соединить три населенных пункта A, B, C системой дорог так, чтобы общая их протяженность была минимальной. Вам предлагается придумать решение этой задачи. Можно считать, что система дорог представляет собой три отрезка с началами в точках A, B, C и концами в точке R. Тогда задача формулируется следующим образом: для треугольника ABC найти точку R, для которой сумма расстояний $AR + BR + CR$ минимальна. [2 балла]

А ⋄ 9 (Обобщение проблемы Штейнера*). Попробуйте решить проблему Штейнера для:

a) четырех точек, расположенных в вершинах квадрата [1 балл]
b) произвольных четырех точек [1 балл]