

Департамент политической науки, 2021-22 уч. год

Высшая математика

Задачи по теории вероятностей, часть 3 (10.12.2021/11.12.2021)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

Формула полной вероятности

Задача 1. На факультете Чародейства и Волшебства учится 60% мальчиков и 40% девочек. Известно, что 20% мальчиков этого факультета и 7% девочек умеют играть на волынке.

- (a) Какой процент от всех студентов факультета составляют мальчики, умеющие играть на волынке?
- (b) Какой процент от всех студентов факультета составляют девочки, умеющие играть на волынке?
- (c) Какой процент от всех студентов факультета составляют умеющие играть на волынке?

Задача 2. На факультете Чародейства и Волшебства учится 60% мальчиков и 40% девочек. Известно, что 20% мальчиков этого факультета и 7% девочек умеют играть на волынке.

- (a) Какой процент из тех студентов, что умеют играть на волынке, составляют мальчики?
- (b) Какой процент из тех студентов, что умеют играть на волынке, составляют девочки?

Задача 3. На факультете Чародейства и Волшебства учится 60% мальчиков и 40% девочек. Известно, что 20% мальчиков этого факультета и 7% девочек умеют играть на волынке.

- (a) Какова вероятность того, что случайно выбранный студент — мальчик?
- (b) Случайным образом выбрали студента. Он оказался мальчиком. Какова вероятность того, что этот студент (мальчик!) играет на волынке? А если случайно выбранный студент оказался девочкой, с какой вероятностью он теперь играет на волынке?
- (c) С какой вероятностью случайно выбранный студент оказался мальчиком, умеющим играть на волынке?
- (d) С какой вероятностью случайно выбранный студент оказался девочкой, умеющей играть на волынке?
- (e) С какой вероятностью случайно выбранный студент умеет играть на волынке?

Формула Байеса

Задача 4. На факультете Чародейства и Волшебства учится 60% мальчиков и 40% девочек. Известно, что 20% мальчиков этого факультета и 7% девочек умеют играть на волынке. Случайным образом выбрали одного студента с курса. Оказалось, что этот студент умеет играть на волынке.

- (a) С какой вероятностью этот студент — мальчик?
- (b) С какой вероятностью этот студент — девочка?

Задача 5. Среди всех людей шпионы составляют $1/10000$ часть. Опытные Контрразведчики разработали тест для определения шпионов. Если тест проходит нормальный человек, не шпион, то с вероятностью 0,99 тест покажет, что это нормальный человек, а с вероятностью 0,01 — что шпион. Если же тест проходит шпион, то с вероятностью 0,9 тест покажет, что это шпион, а с вероятностью 0,1 — что нормальный человек.

- (a) С какой вероятностью случайный прохожий окажется нормальным человеком? Шпионом?
- (b) Для проверки теста Опытные Контрразведчики пробуют на случайном прохожем тест для определения шпионов. С какой вероятностью случайный прохожий окажется нормальным человеком, на котором тест ошибся и показал, что это — шпион?
- (c) С какой вероятностью случайный прохожий окажется шпионом, на котором тест не ошибся и показал, что это — шпион?
- (d) С какой вероятностью тест покажет, что случайный прохожий — шпион?
- (e) Тест показал, что случайный прохожий — шпион. С какой вероятностью он действительно шпион?

Задача 6. Тест на ВИЧ (вирус иммунодефицита человека, причина СПИДа) выдаёт верный результат в 97% случаев. Известно, что ВИЧ заражено $1/5000$ часть всего населения.

- (a) С какой вероятностью случайно взятый человек заражен ВИЧ? Не заражен ВИЧ?
- (b) С какой вероятностью случайно взятый здоровый человек получит положительный тест на ВИЧ?
- (c) С какой вероятностью случайно взятый зараженный ВИЧ человек получит положительный тест?
- (d) Какую долю из всех людей составляют здоровые люди, которым бы тест показал, что они заражены ВИЧ?
- (e) Какую долю из всех людей составляют зараженные ВИЧ люди, которым бы тест показал, что они заражены ВИЧ?
- (f) С какой вероятностью у случайно взятого человека тест на ВИЧ будет положительным?
- (g) Человек получил положительный результат теста на ВИЧ. С какой вероятностью он действительно заражен ВИЧ?

Задача 7. В космосе летают метеориты двух сортов — тяжёлые и лёгкие, причём тяжёлые встречаются втрое чаще лёгких. Если в спутник GPS попадёт лёгкий метеорит, он с вероятностью 70% останется на орбите, и с вероятностью 30% упадёт в океан, а если тяжёлый — то он с вероятностью 90% упадёт в океан, а с вероятностью 10% останется на орбите.

- (a) В спутник попал метеорит. С какой вероятностью он окажется на дне морском?
- (b) Допустим, мы знаем из новостей, что спутник упал в океан из-за столкновения с каким-то метеоритом. С какой вероятностью это был лёгкий метеорит?

Задача 8. Для фильтрации спама используются так называемые *байесовские фильтры*. Простейший механизм работы такого фильтра выглядит следующим образом. Допустим, есть некоторое слово-маркер, характерное для спаммерских писем. Если это слово встречается в сообщении, это увеличивает вероятность того, что письмо является спаммерским. Для расчёта вероятности используется формула Байеса.

Предположим, что всего 10% от всех писем являются спаммерскими, причём слово-маркер встречается в 95% спаммерских писем и в 10% неспаммерских. Если это слово встретилось в письме, какова вероятность того, что оно спаммерское?

Задача 9 (Парадокс Монти Холла). Представьте, что вы стали участником игры, в которой вы находитесь перед тремя дверями. Ведущий, о котором известно, что он честен, поместил за одной из дверей автомобиль, а за двумя другими дверями — по козе. У вас нет никакой информации о том, что за какой дверью находится. Ведущий говорит вам:

Сначала вы должны выбрать одну из дверей. После этого я открою одну из оставшихся дверей, за которой находится коза. (Если у меня будет возможность выбрать, какую из двух дверей открывать, я выберу её случайным образом, с равными вероятностями.) Затем я предложу вам изменить свой первоначальный выбор и выбрать оставшуюся закрытую дверь вместо той, которую вы выбрали вначале. Вы можете последовать моему совету и выбрать другую дверь, либо подтвердить свой первоначальный выбор. После этого я открою дверь, которую вы выбрали, и вы выиграете то, что находится за этой дверью.

Вы выбираете дверь номер 1.

- (a) С какой вероятностью автомобиль находится за дверью номер 1? за дверью номер 2? за дверью номер 3?
- (b) С какой вероятностью ведущий откроет третью дверь, при условии, что машина за второй дверью? За третьей дверью? За первой дверью?
- (c) С какой вероятностью машина за первой дверью, при условии, что ведущий открыл третью дверь? С какой вероятностью машина за второй дверью, при условии, что ведущий открыл третью дверь? Следует игроку ли менять свой выбор?
- (d) (почему этому решению так сопротивляется интуиция) Ведущий, о котором известно, что он честен, поместил за одной из дверей автомобиль, а за двумя другими дверями — по козе. У вас нет никакой информации о том, что за какой дверью находится. Чему равна вероятность, что машина за второй дверью, при условии, что за третьей дверью — коза?
- (e) Чем отличается ситуация пункта 9d от ситуации в задаче Монти Холла?