Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Теория вероятностей
Классическое определение вероятности, условная вероятность и независимость событий: напоминание (11.01.2022)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

События и элементарные исходы

Задача 1. Рассмотрим следующее случайное испытание: монетку подбрасывают три раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.
(a) В первый раз выпал орёл.
(b) Во второй раз выпала решка.
(c) В первый раз выпал орёл, а во второй раз выпала решка.
(d) В первый раз выпал орёл, а после третьего бросания монетка погнулась.
(e) Все три раза монетка выпала одной и той же стороной.
(f) В первый раз выпало не то, что в третий.
(g) Монетка зависла в воздухе на третье бросание.

Задача 2. В условиях задачи 1 определим события A и B. Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям A, B, $A \cap B$, $A \cup B$:
(a) A=«Выпала хотя бы одна решка», B=«Выпало ровно четыре орла»
(b) A=«При первом бросании выпал орёл», B=«При втором бросании выпала решка»
(c) A=«Выпал хотя бы один орёл», B=«Выпало ровно две решки»
(d) A=«Выпало меньше двух орлов», B=«Орлов выпало больше, чем решек».

Задача 3. Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие A — в первый раз выпало пять очков, событие B — хотя бы раз выпадало чётное количество очков. Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие
(a) событию $A \cap B$ (оба события произошли)
(b) событию $A \cup B$ (произошло хотя бы одно из событий).

Классическое определение вероятности

Определение 1. Мы будем говорить, что два события *равновероятны*, если нет никаких объективных причин считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Определение 2. Если все элементарные исходы равновероятны, то вероятностью $p(A)$ события A называется отношение количества благоприятных исходов к общему количеству элементарных исходов.

Задача 4. Найти вероятности всех событий, фигурировавших в предыдущих задачах.

Комбинаторика и вероятность

Задача 5. Буквы П, Р, Б, Л, М, О, Е, А написаны на отдельных карточках. Ребёнок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.

(a) Если ребёнок берет 3 карточки, какова вероятность, что получится слово «ЛОБ»?

(b) Если ребёнок берет все 6 карточек, какова вероятность, что получится слово «ПРОБЛЕМА»?

Задача 6. На столе лежат три карточки с буквой «О», две карточки с буквой «К» и одна карточка с буквой «Ш». Какова вероятность, что ребёнок из предыдущей задачи соберёт из них слово «ОКОШКО»?

Теорема сложения вероятностей

Задача 7. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — (выпало не меньше трёх орлов), событие B — (выпала хотя бы одна решка).

(a) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.

(b) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию B и найти его вероятность.

(c) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cap B$ и найти его вероятность.

(d) Вычислить вероятность события $A \cup B$.

(e) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cup B$ и найти его вероятность, сравнить с ответом в предыдущем пункте.

Задача 8. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — (выбрали туза), событие B — (выбрали пиковую карту).

(a) Найти вероятности событий A и B.

(b) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.

(c) Вычислить вероятность события $A \cup B$.

(d) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cup B$? Найти вероятность этого события, сравнить с ответом в предыдущем пункте.

Условная вероятность

Определение 3. *Условной вероятностью* $P(A|B)$ события A при условии B называется отношение вероятности пересечения $A \cap B$ к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Задача 9. Монетку подбросили два раза. Событие A — выпадение хотя бы одной решки, событие B — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
(d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 10. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвёртый раз, событие B — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
(d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

(Не)зависимость событий

Определение 4. События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B, а вероятность события B равна вероятности события B при условии A:

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Это определение можно переписать в симметричной форме:

$$\text{События } A \text{ и } B \text{ независимы если и только если } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Задача 11. Известно, что среди владеющих английским языком знающие испанский встречаются в 2 раза чаще, чем среди людей в целом. Зависимы ли события A — (случайно взятый человек знает английский) и B — (случайно взятый человек знает испанский)?

Задача 12. В некой стране хотя бы какой-то иностранный язык знает 20% населения. В столице этот показатель равен 35%. Являются ли независимыми события «этот человек знает иностранный язык» и «этот человек живёт в столице» независимыми?

Задача 13. Монетку подкинули 3 раза. Событие A=«в первый раз выпал орёл», событие B=«орёл выпал два раза».

(a) Найти вероятность события A.
(b) Найти вероятность события B.
(c) Найти вероятность $P(A \cap B)$.
(d) Являются ли события A и B независимыми?

Задача 14. Кубик брошен один раз. Являются ли события A и B независимыми, если событие A — выпало чётное число, а

(a) событие B — выпало число большее 2?
(b) событие B — выпало число большее 3?

(c) событие B — выпало число большее 4?

Задача 15. Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно (и даже нужно!) использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки.