Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Лекция 8. Матрицы и операции с ними. (9.11.2021)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов,Р. Я. Будылин

1 Определения

Определение 1. Матрицей называется прямоугольная таблица с числами. Строки таблицы называются строками матрицы, столбцы — столбцами матрицы. Одно любое конкретное число называется элементом матрицы. Размером матрицы называется количество её строк на количество её столбцов (именно в этом порядке!). Целиком матрицы принято обозначать заглавными латинскими буквами ($A, B, C \ldots$), а их элементы — соответствующими маленькими с двойным индексом (первый — номер строки, второй — номер столбца): элементы матрицы A, стоящий в первой строке и втором столбце обозначается как a_{12} и читается как "а один два".

Матрицы записываются с ограничивающими их круглыми скобками без разделительных чёрточек внутри:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2.5 \\ -0.5 & \pi & 7 \end{pmatrix}$$

Соответствующий элемент $a_{21} = -0.5$

2 Операции с матрицами

Для матриц определены обычные арифметические операции, но они не всегда имеют свойства, совпадающие со свойствами аналогичных операций между числами. Кроме того, для матриц вводятся ещё несколько операций, удобных для работы с таблицами.

2.1 Умножение на число

При умножении матрицы на число, все её элементы умножаются на это число. В общем виде, если ищется матрица $B = \alpha A$, то $b_{ij} = \alpha a_{ij}$

Пример 1.

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & 21 \end{pmatrix}$$

2.2 Транспонирование

Для матриц вводится вспомогательная операция, позволяющая менять местами строчки и столбцы: транспонирование. Это бывает удобно, когда, к примеру, в одной матрице по строкам идут страны, а в другой странам отведены столбцы и для сложения показателей необходимо одну из матриц переписать, чтобы они обе были одинакового размера. При транспонировании достаточно взять столбцы матрицы и записать их по строкам (строки тогда автоматически станут столбцами). Операция обозначается буквой T записанной там же, где обычно пишется степень: A^T. Операция имеет такой же порядок выполнения, как и степень, то есть выполняется перед сложением и умножением.

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2.3 Сложение и вычитание

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера. Действия производятся поэлементно, то есть если ищется матрица $C = A + B$, то $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-(-2) & 1-3 & 2-(-1) \\ 3-1 & 4-0 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4 Умножение

Умножение матриц — сложная, совершенно неочевидная операция. Умножать можно матрицы только если *внутренние* размеры матриц совпадают. То есть можно умножить матрицу размера 2×3 на матрицу 3×4 и причём именно в этом порядке (в другом порядке перемножение будет невозможно). Результат имеет размер получаемый вычёркиванием внутренних размеров матриц: $A_{2\times3} \cdot B_{3\times4} = C_{2\times4}$.

Само умножение производится следующим образом: для каждой ячейки результата (как вычислить размер результирующей матрицы мы уже обсудили выше) выбирается соответствующая *строка левой* матрицы и *столбец правой* матрицы. Далее в ячейку результата записывается *сумма попарных произведений элементов указанной строки и столбца*[1] (вот где нужно, чтобы внутренние размеры совпадали — количество элементов в строке левой матрицы должно быть таким же как количество элементов в столбце правой матрицы!). Если мы перемножаем матрицы $A_{n\times k} \cdot B_{k\times m} = C_{n\times m}$, то можно даже выписать формулу для вычисления каждого элемента результата:

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} (a_{it} \cdot b_{tj}),$$

однако она выглядит довольно сложно. Вместо запоминания формулы, рассмотрим пример умножения, где цветом выделены строки левой матрицы и столбцы правой матрицы:

Пример 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot0.1 + 2\cdot0.3 + 3\cdot0.5 & 1\cdot0.2 + 2\cdot0.4 + 3\cdot0.6 \\ 4\cdot0.1 + 5\cdot0.3 + 6\cdot0.5 & 4\cdot0.2 + 5\cdot0.4 + 6\cdot0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 & 2.8 \\ 4.9 & 6.4 \end{pmatrix}$$

Как было видно, размер результата не обязан совпадать с размером ни одного из сомножителей. Однако есть важный частный случай, где все матрицы в произведении оказываются одного размера: случай квадратных матриц, то есть размера $n \times n$. Квадратные

[1] Для тех, кому интересно, в этом есть хитрый внутренний смысл: на самом деле это скалярное умножение двух векторов, просто координаты одного записаны в строке левой матрицы, а координаты второго – в столбце правой матрицы.

матрицы одного размера можно и складывать и умножать друг на друга и всегда получившийся результат будет того же размера. В каком-то смысле квадратных матриц одного размера ведут себя наиболее похоже на обычные числа и поэтому говорят, что они образуют *алгебру* матриц.

Важно отметить, что умножение матриц не обладает привычными нам свойствами умножения чисел: для матриц важен порядок в котором мы умножаем матрицы и менять местами их нельзя. Если поменять местами сомножители в матричном произведении, может оказаться, что такое действие вообще невозможно из-за размерностей матриц, или же результат будет иметь иной размер, чем при первоначальном расположении сомножителей. Однако даже если мы перемножаем квадратные матрицы и проблем с размером нет, в общем случае $AB \neq BA$.

3 Определитель матрицы

Все описанные выше действия в качестве результата давали матрицу. Есть ещё одна операция (вспомогательная), которая каждой *квадратной* матрице ставит в соответствие число. Эта операция называется *определитель матрицы* и обозначается $\det(A)$ или же вертикальными палочками (похожими на модуль, но это не модуль матрицы, у этой операции совсем другие свойства!): $|A|$. При выписывании матрицы целиком обычно заменяют круглые скобки прямыми:

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя производят поэтапно, для каждого размера матрицы, сводя его к определителям меньшего размера. Для матрицы размера 2×2 есть явная формула:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Для матриц размера 3×3 тоже есть формула, но она довольно громоздкая, так что мы на примере матриц размера 3×3 сразу разберём общий случай. Метод вычисления определителя, который мы разберём ниже, называется *разложением по строке или столбцу*. Разберём процесс вычисления на примере.

Пример 5. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Для начала, выберем любую (результат всегда получится один и тот же!) строку или столбец матрицы. В данном примере мы выберем первую строку. Далее выписываем элементы этой строки с большими промежутками:

$$1 \qquad 2 \qquad 3$$

Нам потребуется *правило знаков*: берём матрицу того же размера, что и исходная и заполняем ее плюсами и минусами в шахматном порядке, начиная с плюса в левом верхнем углу (первая строка и первый столбец).

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Перед выписанными элементами выбранной (в нашем примере — первой) строки ставим знаки из соответствующей строки правила знаков:

$$+1 \qquad -2 \qquad +3$$

После этого каждый из выписанных элементов домножаем на определитель меньшего размера. Этот определитель получается из исходной матрицы путём вычёркивания строки и столбца, которые содержат сам элемент. Так, например число 1 мы должны домножить на определитель $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Ниже приведён полный процесс вычисления:

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}}^{\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}} = +1 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} -2 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} +3 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} =$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 - (-12) - 9 = 0$$

Сам по себе определитель матрицы будет нужен нам для определения обратной матрицы. Кроме того, определитель имеет множество различных применений и ниже мы рассмотрим один из примеров.

3.1 Правило Крамера

Очень часто в приложениях встречаются системы линейных уравнений, то есть уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Из школы известно (да и вообще здравый смысл подсказывает), что для того, чтобы решение у системы было и было единственное, нужно чтобы количество переменных и количество неизвестных было одинаковым (то есть $k = n$). На самом деле все несколько сложнее и, например, даже в этом случае может оказаться, что у системы все же нет решений или решений бесконечно много, но мы не будем углубляться в эти детали. В школе учат решать такие системы выражая сначала одну переменную через все остальные, а потом постепенно все сводя к одному уравнению с одной неизвестной. Это правильный, однако довольно длинный и трудоёмкий подход. Оказывается, что если воспользоваться матричной формой записи системы, то ответ можно выписать сразу с использованием определителя. Далее мы будем работать только с системами где $k = n$.

Систему 1 можно переписать в матричном виде. Если обозначить:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

то удивительным образом матричное умножение матрица A на столбец (то есть фактически матрицу из одного столбца) x дают в результате столбец из левых частей уравнений в системе 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Приравнивая полученную матрицу (из одного столбца) к столбцу, содержащему значения из правых частей системы 1, получаем очень короткую, *матричную* форму записи:

$$Ax = b$$

Матрица A называется *матрицей системы*, а столбец b — *столбцом правых частей*.

Правилом Крамера называется метод решения, когда сразу можно выписать ответ через определители матриц, составленных из коэффициентов системы. Рассмотрим применение метода Крамера на примере (вместо x_1 и x_2 будем в примере использовать привычные x и y).

Пример 6. Решить систему $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Для решения уравнения сперва необходимо вычислить определитель матрицы системы. Его обозначают греческой буковой "дельта":

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$$

Если этот определитель оказался ненулевым (что делать когда он равен нулю, мы обсудим позже), у системы точно имеется единственное решение. Далее вычисляются два вспомогательных определителя по следующему правилу. Для каждой переменной берётся соответствующий ей столбец из матрицы системы (напомним, матрица системы это просто коэффициенты из уравнений) и заменяется на столбец правой части. У полученной матрицы считается определитель.

Для переменной x необходимо заменить столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и тогда соответствующий определитель будет

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

Для переменной y необходимо заменить столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ и тогда соответствующий определитель будет

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6$$

После этого можно сразу выписать ответ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{3}{-3} = -1 \\ \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2 \end{cases}$$

Описанный выше пример иллюстрирует общую формулу: $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$. Но что делать, если определитель матрицы системы оказался равен нулю? Оказывается в этом случае есть два варианта:

1. Если хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i} \neq 0$, то на самом деле они все ненулевые и решения у этой системы нет.

2. Если хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i} = 0$, то на самом деле они все нулевые. В случае, если у нас система из 2 уравнений и 2 неизвестных, то решений у этой системы бесконечно много, а вот в случае системы большего порядка необходимо дополнительное исследование.

На практике методом Крамера удобно пользоваться для систем из 2 уравнений и 2 неизвестных, однако при некоторой оптимизации вычислений определителей, метод оказывается достаточно быстрым для систем любого размера. Полученные явные формулы для систем уравнений с матрицей системы размера 2×2 позже встретятся при вычислении коэффициентов линейной регрессии, а в общем случае могут быть применены к задачам отыскания коэффициентов регрессии с более сложной формой зависимости (все это встретится в последующих курсах).