

**Школа лингвистики, 2021-22 уч. год**  
**Линейная алгебра и математический анализ**  
**Предел функции (28.09.2021)**

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

**Задача 1.** Найти следующие пределы.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x-3}; & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+2x+1}{x-1}; & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+2x+1}{-x^2+x-3}; \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}; & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1}; & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+x-3}{-x^3+2x+1}; \end{array}$$

**Задача 2.** Построить график функции  $y = f(x)$ .

(a)

$$f(x) = |x - 2|;$$

(b)

$$f(x) = \frac{|x|}{x};$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0; \\ x + 1 & x \geq 0; \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0; \\ \frac{1-x^2}{1-x}, & x > 0; \end{cases}$$

Пользуясь построенными графиками, найти пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . В пункте 2a найти также  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ . В пункте 2d, найдите также  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**Задача 3.** Пользуясь известными правилами для арифметических операций, найти следующие пределы.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1); & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}; & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1/4 + 1/x}{4 + x}; \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 4-0} \sqrt{16 - x^2}; & \text{(e)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}; & \text{(h)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}; \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}; & \text{(f)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}; & \end{array}$$

**Задача 4.** Найти предел, если он существует. Если не существует, объяснить, почему.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|); & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}; & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0,5-0} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}. \end{array}$$

**Задача 5.** Найдите пределы:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x};$

- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ ;  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$ .

## Дополнительные задачи

Рассмотрим *геометрическую прогрессию* со знаменателем  $q$ , то есть последовательность чисел, у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на  $q$ . Если  $0 < q < 1$ , такая последовательность будет убывать, поскольку каждый следующий член меньше предыдущего (при умножении на число, меньшее 1, числа уменьшаются). Пусть  $a_n$  — это  $n$ -й член последовательности,  $a_1 = c$ . Тогда  $a_2 = cq$ ,  $a_3 = cq^2$ ,  $a_4 = cq^3$  и т.д. Вообще,  $a_n = cq^{n-1}$  (использована степень  $(n-1)$ , а не  $n$ , потому что счёт начался с нуля, первому члену соответствует нулевая степень).

Пусть  $S_n$  — сумма первых  $n$  членов последовательности, то есть  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ . Например,  $S_1 = a_1 = c$ ,  $S_2 = a_1 + a_2 = c + cq$ ,  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = c + cq + cq^2$  и т.д.

**Задача 6.** Доказать, что  $S_n = c \frac{1 - q^n}{1 - q}$

**Указание.** Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = c + cq + \dots + cq^{n-1} \quad (1)$$

Тогда можно рассмотреть число  $qS_n$ , домножив правую часть равенства (1) на  $q$ . Получим выражение, которое очень похоже на  $S_n$ , и отличается только некоторыми слагаемыми. Исходя из этого, можно записать уравнение на  $S_n$  и решить его.

**Задача 7.** Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  если  $0 < q < 1$ . Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , если  $S_n$  — сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии с первым членом  $c$  и знаменателем  $q$ .

**Задача 8.** Постройте график функции:

- (a)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(nx)$   
 (b)  $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2m}(\pi n!x)) \right)$