Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Индукция, комбинаторика, графы. Повторение. (8-9 декабря 2021 года)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Найти все целые числа, которые больше 162_7 и меньше 10111_3.

Задача 2. В выражении $(3+2a+b+c)^{23}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты получатся при
(a) $a^2b^7c^{13}$;
(b) $a^{11}c^{12}$;
(c) $a^5b^8c^3$.

Задача 3. На плоскости проведено n окружностей. Докажите, что карту, ими образованную, можно раскрасить двумя красками (так, чтобы по границе цвета не совпадали).

Задача 4. В столовой есть (неограниченное количество) пирожки с яблоком, с капустой, с вишней, с мясом, с луком и яйцом. Мария берёт пирожки на большую компанию из 30 человек, по одному пирожку на каждого. Сколькими способами она может это сделать, если она планирует взять хотя бы по одному пирожку каждого вида?

Задача 5. Сколько слов длины n, состоящих из букв a и b, содержит чётное число букв a?

Задача 6. Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар перчаток по правой и левой перчатке так, чтобы ни одни не получил пары?

Задача 7. Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырём игрокам?

Задача 8. Имеется колода из $4n$ ($n \geq 5$) карт, которая содержит карты 4 мастей, по n карт каждой масти, занумерованных числами 1, 2, ..., n. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать пять карт так, что среди них окажутся:
(a) пять карт без ограничений;
(b) пять последовательных карт одной масти;
(c) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;
(d) три карты с одним номером и две другие с другим;
(e) пять карт какой-нибудь одной масти;
(f) пять последовательно занумерованных карт;
(g) в точности три карты из пяти с одним и тем же номером;
(h) не более двух карт каждой масти.

Задача 9. У царя Гвидона было три сына (других детей не было). Из его потомков сто имело по два ребёнка, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

Задача 10. Каждый из 17 учёных переписывается с остальными коллегами. Каждые двое переписываюся на одном из трёх языков: английском, китайском или русском. Докажите, что не менее трёх учёных переписываются друг с другом на одном и том же языке.

Задача 11. Изобразить все попарно неизоморфные 6-вершинные графы без петель и кратных рёбер, состоящие

(a) из 4 компонент;
(b) из 3 компонент;
(c) из одной компоненты и имеющие 7 рёбер и 2 висячие вершины.

Задача 12. Доказать, что в каждом простом планарном графе есть вершина, степени не больше, чем 5.

Задача 13. Изобразить все попарно неизоморфные деревья:
(a) с 6 рёбрами и 3 висячими вершинами;
(b) с 6 рёбрами и 6 висячими вершинами;
(c) с 7 рёбрами и 3 висячими вершинами;
(d) с 8 рёбрами и 3 вершинами степени 3.

Задача 14. На курсе 120 студентов. В очень большом домашнем задании 120 задач. Оказалось, что каждый из 120 студентов решил ровно 2 задачи и что каждую задачу решило ровно 2 студента. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый студент рассказывал одну из решённых им задач.

Задача 15. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трех направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через A) записана единица. Через кубик A проходит три слоя параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

Задача 16. В алфавите есть шесть букв. *Красивеньким* называется слово из шести букв, в котором есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько существует красивеньких слов?

Задача 17. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть ровно три единицы?

Задача 18. Жюри лингвистической олимпиады решило присудить 3 диплома первой степени, 3 диплома второй степени и 2 диплома третьей степени. В «короткий список» попало 11 участников. Сколькими способами можно среди попавших в короткий список распределить дипломы, чтобы каждый диплом нашел своего хозяина?

Задача 19. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Задача 20. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

Задача 21. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы
(a) k натуральных слагаемых?
(b) k неотрицательных слагаемых?
(представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)

Задача 22. Сколькими способами группу из 12 студентов можно разбить на 6 пар?

Задача 23. Сколько различных перестановок можно образовать из слова «ОБРАЗОВАНИЕ», сохраняя порядок гласных букв (то есть гласные должны быть расположены в порядке О, А, О, А, И, Е)?

Задача 24. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

Задача 25. n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\frac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.