Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Четвёртая неделя (29-30 сентября 2021 года)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Разделите с остатком
(a) 135 на 15;
(b) 1 000 000 на 11;
(c) 10 000 000 на 11;
(d) 10^n на 11;
(e) 10 000 на 9;
(f) 10^n на 9;
(g) 2^{10} на $2^3 - 1$;
(h) (-5) на 3;

Задача 2. Найдите остаток от деления
(a) 123 456 788 765 на 10;
(b) 7 426 945 542 на 9;
(c) 741 238 455 на 11.
(d) 2^{1024} на 3.

Задача 3. Верно ли, что число с суммой цифр 27 обязательно делится на 27?

Задача 4. Докажите что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на (a) 2; (b) 4; (c) 8.

Определение 1. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, если имеют одинаковый остаток от деления на n. Обозначения: $a \equiv b \pmod{n}$.

Задача 5. Пусть $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$. Доказать, что в этом случае
(a) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$.
(b) $ac \equiv bd \pmod{n}$.
(c) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.
Подсказка: числа a и b можно представить в виде $a = b + nk$, $c = d + nl$.

Задача 6. Всегда ли верно, что если $ak = bk \pmod{n}$, то $a = b \pmod{n}$ при $k \neq 0$?

Задача 7. Пусть p — простое число, $p > 3$. Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24.

Задача 8. Пусть у многочлена $P(x)$ все коэффициенты целочисленные. Известно, что $P(2)$ делится на 5, $P(5)$ делится на 2. Доказать, что $P(7)$ делится на 10.

Системы счисления.

Задача 9. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$264_d = 144_{10}.$$

Задача 10. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$30_d = 27_{10}.$$

Задача 11. Решить уравнение
$$224_x + 1_{17} = 101_8.$$

Задача 12. Указать десятичные записи чисел

$$20121_3, \quad 1011010,101_2 \quad 4567,24_8 \quad 2FE,C_{16}.$$

Задача 13. Перевести числа

$$69_{10}, \quad 111_{10}, \quad 537_{10}, \quad 1349_{10}, \quad 2470_{10}, \quad 5263_{10}$$

в системы счисления соснованиями 2, 3, 8, 12, 16, 20.

Задача 14. Перевести дробные числа

$$55,75_{10} \quad 113,625_{10}, \quad 1234,5678_{10}, \quad \frac{11147_{10}}{27_{10}}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20 (с точностью 5 знаков после запятой).

Алгоритм Евклида

Задача 15. С помощью алгоритма Евклида найти НОД чисел
$$1234 \text{ и } 234; \quad 616 \text{ и } 364; \quad 697 \text{ и } 221; \quad 2835 \text{ и } 2431.$$

Задача 16. Решить в целых числах уравнение
(a) $1234x + 234y = 7$;
(b) $616x + 364y = 28$;
(c) $697x + 221y = 51$;
(d) $2431x + 2835y = 2$.

Задача 17. Найти НОД многочленов
(a) $2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$ и $4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x + 1$;
(b) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 8$;
(c) $x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$ и $x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$;
(d) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ и $x^2 - x - 1$;
(e) $3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ и $3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;
(f) $x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 23x + 21$ и $x^3 + x^2 + x - 3$.