Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Пятая неделя (6 – 7 октября 2021 года)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Задача 1. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_m)$ — произвольные функции алгебры логики, существенно зависящие от всех своих переменных. Показать, что функция

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(y_1, \ldots, y_m))$$

также существенно зависит от всех своих переменных.

Задача 2. Найти вероятность того, что случайно выбранная среди функций алгебры логики от переменных x, y, z функция $f(x, y, z)$ будет существенно зависеть от всех трёх переменных x, y, z.

Задача 3. Число наборов из B^n, на которых булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает единичные значения, называется *весом* функции f и обозначается через $\|f\|$. Показать, что если f существенно зависит ровно от k переменных, то $\|f\|$ делится на 2^{n-k}.

Задача 4 (*). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, существенно зависящая от всех переменных. Доказать, что для любого $k = 1, \ldots, n-1$ в f можно так выбрать $n-k$ переменных и так подставить вместо них значения 0 и 1, что получившаяся булева функция будет существенно зависеть от всех оставшихся k переменных.

Задача 5. Функция называется *симметрической*, если она не меняется при любой перестановке своих аргументов. Найти число n-местных симметрических функций.

Задача 6. Показать, что любая симметрическая функция, отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных.

Задача 7 (*). a) Показать, что любая булева функция от трех переменных может быть получена из симметрической функции от семи переменных отождествлением переменных; b) Показать, что любая булева функция может быть получена из симметрической функции отождествлением переменных.

Задача 8. Написать формулу, использующую только функции $x\&y$, $x \vee y$ и $\overline{x}$ для функций от переменных x_1, x_2, x_3, x_4, принимающих значение 1 только на наборах
(a) (1001);
(b) (0000), (1010), (1111).

Задача 9. Построить формулу над $P_2(2)$ (все функции алгебры логики, зависящие от двух переменных), реализующую функцию $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $|\tilde{x}| < |\tilde{y}|$ (где $|\tilde{x}|$ — число, двоичная запись которого задается набором $\tilde{x}$; старшие разряды расположены слева).

Задача 10 (*). Найти число функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что

$$f(x_1 \to y_1, \ldots, x_n \to y_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \to f(y_1, \ldots, y_n).$$

Задача 11. Доказать, что некоторая переменная является существенной для булевой функции тогда и только тогда, когда она входит в её полином Жегалкина.

Задача 12 (*). Показать, что полином Жегалкина для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит слагаемое $x_1 x_2 \ldots x_n$ тогда и только тогда, когда f имеет нечетный вес.

Задача 13 (*). Степенью полинома Жегалкина называется максимальная длина содержащихся в нем слагаемых. Доказать, что функция от n переменных, реализуемая полиномом Жегалкина степени k, принимает каждое из значений $0, 1$ на не менее чем 2^{n-k} наборах.

Задача 14. Найти число различных полиномов Жегалкина степени r от n переменных.

Задача 15 (*). Доказать, что из любого полинома Жегалкина от n переменных степени k; $k \geq 3$, путем отождествления переменных можно получить полином Жегалкина степени в точности $k-1$.

Задача 16. Выразима ли функция $x \oplus y$ через функцию $x \to y$?

Задача 17. Используя язык функций алгебры логики, докажите равенства

(a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$;
(b) $B \cup (A \backslash B) = A \cup B$;
(c) $(A \backslash B) \cap ((A \cup B) \backslash (A \cap B)) = A \backslash B$;
(d) $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

Задача 18. Пусть x, y, z — целые числа, для которых истинно высказывание

$$\overline{(x = y)} \& ((y < x) \to (2z > x)) \& ((x < y) \to (x > 2z)).$$

Чему равно x, если $z = 7$, $y = 16$?

Задача 19. Проследите за следующими рассуждениями. Сначала убеждаемся в истинности при произвольных A и B утверждения

$$(A \to B) \vee (B \to A).$$

Теперь возьмем произвольный угол. Пусть A — утверждение «косинус угла не превосходит 0», а B — «синус угла не превосходит 0». Утверждение «если косинус угла не превосходит 0, то синус угла не превосходит 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если синус угла не превосходит 0, то косинус угла не превосходит 0», но оно также ложно. То есть оба утверждения в проверенной дизъюнкции ложны (при некотором выборе утверждений A и B), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.