

Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов

Четвёртая неделя (29–30 сентября 2021 года)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. (а) Сколько функций алгебры логики $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ удовлетворяет условию $f(0, 0, 0, 0) = f(1, 1, 1, 1)$?

(б) Сколько функций алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию $f(0, 0, \dots, 0) = f(1, 1, \dots, 1)$?

Задача 2. Сколько функций алгебры логики $f(x, y, z)$ существенно зависят от всех трёх переменных x, y, z ?

Задача 3. Составьте таблицы истинности для функций, заданных следующими формулами.

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| (а) $\overline{x \& y}$ | (d) $x \vee \overline{y}$; | (g) $x \rightarrow y$; |
| (b) $\overline{x \vee \overline{y}}$ | (e) $x \wedge \overline{x}$; | |
| (c) $\overline{x} \vee y$; | (f) $(x \vee y) \wedge \overline{x \wedge \overline{y}}$; | (h) $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$. |

Задача 4. Решить систему

- (а)
$$\begin{cases} x \oplus y \oplus z = xy \\ ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{z}) = 0 \end{cases}$$
- (б)
$$\begin{cases} x \oplus y \oplus z = 1 \\ xy \oplus z = 0 \end{cases}$$

Задача 5. На скольких наборах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ функция алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ обращается в 1?

- (а) $x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 x_5 \oplus x_1 x_2 x_4 x_5 \oplus x_1 x_3 x_4 x_5 \oplus x_2 x_3 x_4 x_5$, ($n = 5$);
 (б) $x_1 x_2 x_3 \oplus x_3 x_4 x_5 \oplus x_6$, ($n = 6$);
 (с) $f(x_1, \dots, x_n) = (\dots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \dots) \rightarrow x_n$.

Задача 6. Используя таблицы истинности, доказать эквивалентность формул.

- (а) $\overline{x \rightarrow y}$ и $x \overline{y}$;
 (б) $x \sim y$ и $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$;
 (с) $x \rightarrow (y \vee z)$ и $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$.

Задача 7. Используя дополнительно основные эквивалентности, выяснить, эквивалентны ли формулы

- (а) $xy \vee z$ и $\overline{x}(\overline{y \vee \overline{z}})$;
 (б) $xy \oplus xz \oplus yz$ и $\overline{\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}}$;
 (с) $(\overline{x} \rightarrow y) \rightarrow (\overline{xy} \sim (x \oplus y))$ и $(\overline{xy} \rightarrow x) \rightarrow y$;
 (д) $(x \oplus yz) \rightarrow (\overline{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$ и $x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x)$;
 (е) $((x \vee y) \rightarrow yz) \vee (y \rightarrow xz) \vee (x \rightarrow (\overline{y} \rightarrow z))$ и $(x \rightarrow y) \vee z$.

Задача 8. Представить в виде СДНФ

- (а) $x \vee y$;
 (б) $(x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3$;
 (с) (01010001);

(d) $(x_1 \oplus x_2)(x_3 \rightarrow \overline{x_2}x_4)$;

Задача 9. Представить в виде СКНФ

- (a) $x_1 \oplus x_2$;
- (b) $x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_3$;
- (c) (00101110).

Задача 10. Написать формулу, использующую только функции $x \& y$, $x \oplus y$ и 1, а затем упростить её, для функций

- (a) $x \vee y \vee z$;
- (b) $xy \vee xz \vee yz$.

Задача 11. Выразима ли функция $x \oplus y$ через функцию $x \rightarrow y$?

Задача 12. (a) Выразить функцию $x \downarrow y$ через функцию $x \mid y$.
 (b) Выразить функцию $x \downarrow y$ через функцию $x \mid y$ с использованием минимально возможного числа операций (связок) $f \mid g$.

Задача 13. Напишите отрицания к следующим утверждениям.

- (a) Сегодня хорошая погода.
- (b) $\sqrt{\pi^4 + 1} > 10$.
- (c) Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять в парк.

Задача 14. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?**Задача 15.** На аварийном пульте системы расположены 4 ламочки: L_1, L_2, L_3, L_4 . Система выключается только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- (a) загорелась L_1 , но не загорелась L_2 ;
 - (b) загорелись L_2 и L_3 , но не горит L_4 ;
 - (c) загорелась L_4 и не горит L_1 .
- (a) Построить таблицу функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, характеризующей условия выключения системы.
 (b) Построить формулу этой функции.