Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Третья неделя (21 – 23 сентября 2021)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. (a) Сколькими способами можно выбрать 4 человек из 10?
(b) Сколькими способами можно выбрать 6 человек из 10?
(c) В городе Нью-Васюки все улицы — прямые, и причем любые две улицы либо параллельны, либо пересекаются под прямым углом, а сам город имеет форму прямоугольника, длиной в 6 кварталов и шириной в 4 квартала. Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь только по улицам и только вверх и вправо?
(d) Почему ответы на все эти пункты совпадают?
(e) В городе Нью-Васюки сменился мэр, после чего к нему присоединили часть нью-васюковской области. В результате город сохранил свою планировку, но стал иметь форму прямоугольника со сторонами l и m кварталов. Сколькими способами теперь можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний?

Задача 2. В правом верхнем углу города Нью-Васюки (длиной l кварталов и шириной m кварталов) находится телеграф. Ровно на один квартал ниже его находится библиотека. Ровно на один квартал левее телеграфа находится банк. Сколькими способами можно добраться из левого нижнего угла до
(a) библиотеки?
(b) банка?
(c) телеграфа?
(d) Доказать формулу $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
(e) Доказать формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача 3. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребёнок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.
(a) Если ребёнок берет 3 карточки, какова вероятность, что получится слово «ТОР»?
(b) Если ребёнок берет все 6 карточек, какова вероятность, что получится слово «ТЕОРИЯ»?

Задача 4. На столе лежат три карточки с буквой «А», две карточки с буквой «Н» и одна карточка с буквой «С». Какова вероятность, что ребёнок из предыдущей задачи соберет из них слово «АНАНАС»?

Задача 5. В корзине пять красных и четыре зеленых шара. Валентина Ильинична наугад вытащила три шара. (После извлечения шара из корзины он откладывается в сторону и назад в корзину не возвращается.) Какова вероятность, что все три шара окажутся
a) красными? b) зелеными? c) синими?

Задача 6. В корзине семь красных и три зеленых шара. Наугад вытащили 4 шара. Какова вероятность, что среди них есть два красных и два зеленых шара?

Вероятность

Задача 7. Игральный кубик бросили один раз. Перечислить элементарные исходы, благоприятные следующим событиям.

(a) на кубике выпала шестёрка
(b) на кубике выпало количество очков, меньшее двух
(c) на кубике выпало чётное количество очков
(d) на кубике выпало больше трёх очков
(e) на кубике выпало семь очков

Задача 8. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Значит, элементарные исходы в этом испытании такие: Решка-Решка, Решка-Орёл, Орёл-Решка, Орёл-Орёл. Мы будем для краткости обозначать их РР, РО, ОР, ОО. Являются ли событиями в этой системе элементарных исходов такие происшествия:

(a) выпало два орла
(b) в первый раз выпал орёл
(c) выпала хотя бы одна решка
(d) орёл не выпадал ни разу
(e) орёл выпадал в большем количестве случаев, чем решка

Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислите элементарные исходы, им благоприятные.

Задача 9. Рассмотрим следующие ситуации:

(a) Монетку подкидывают 5 раз. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Сколько элементарных исходов в этом испытании?
(b) А если монетку подкидывают 6 раз?
(c) Из стандартной колоды игральных карт вытаскивают случайную карту, записывают её масть, и возвращают карту в колоду. Потом колоду перемешивают, еще раз вытаскивают случайную карту и снова записывают её масть. Сколько элементарных исходов в этом испытании?
(d) А если это происходит не 2 раза, а 5 раз?

Задача 10. Рассмотрим следующее случайное испытание: монетка подкидывается четыре раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.

(a) В первый раз выпал орел.
(b) Во второй раз выпала решка.
(c) В первый раз выпал орел, а во второй раз выпала решка.
(d) В первый раз выпал орел, а после третьего бросания монетка погнулась.
(e) Все четыре раза монетка выпала одной и той же стороной.
(f) В первый раз выпало не то, что в четвертый, а во второй — не то, что в третий.
(g) Монетка зависла в воздухе на четвертое бросание.

Задача 11. В условиях задачи 10 определим события A и B. Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям A, B, $A \cap B$, $A \cup B$:

(a) A=«Выпала хотя бы одна решка», B=«Выпало ровно пять орлов»
(b) A=«При первом бросании выпал орел», B=«При втором бросании выпала решка»
(c) A=«Выпал хотя бы один орел», B=«Выпало ровно три решки»
(d) A=«Выпало меньше двух орлов», B=«Орлов выпало больше, чем решек».

Задача 12. Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие A — в первый раз выпало пять очков, событие B — хотя бы раз выпадало чётное количество очков. Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие

(a) событию AB (оба события произошли)
(b) событию $A + B$ (произошло хотя бы одно из событий).

Комбинаторика (числа Фибоначчи)

Последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ чисел Фибоначчи определяется рекуррентным образом: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при всех n, $n \geq 2$.

Задача 13. Пусть φ — «золотое сечение», т. е. $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Доказать, что тогда для n-го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:

a) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$ (формула Бине);
b) $f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil$.

Доказать, что элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:

c) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;
d) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;
e) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;
f) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;
g) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;
h) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1} = f_{n+1} f_{m+1} - f_{n-1} f_{m-1}$;
i) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;

Задача 14. Доказать, что любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq 1$, $i = 2, 3, \ldots$

Задача 15. Для всех $n \geq 0$ докажите равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = f_{n+1}.$$

Комбинаторика (разное)

Задача 16. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 17. Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

Задача 18. Пусть $N(r)$ — количество предметов, обладающих ровно r свойствами, $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами. Докажите равенства

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k.$$

Задача 19. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

Задача 20. Доказать, что любые два соседних члена последовательности Фибоначчи не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

Задача 21. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа?

Задача 22. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа, считая при этом, что числа 1 и n — тоже соседние?

Задача 23. На окружности отмечены $2n$ различных точек. Сколькими способами их можно разбить на n пар, соединив непересекающимися отрезками?

Задача 24. Переведите числа 6264_7 и $11010,00101011_2$ в десятичную систему счисления.

Задача 25. Переведите числа 352, 23,32 и $\frac{231}{343}$ из десятичной системы счисления в семеричную.

Задача 26. Сформулируйте и докажите следующие признаки делимости:
- (a) признак делимости на 3 в 6-чной системе счисления;
- (b) признак делимости на 13 в 14-чной системе счисления;
- (c) признак делимости на 2 в 9-чной системе счисления.

Задача 27. Построить таблицу истинности для функции, заданной формулой

$$(\overline{x} \vee yz) \vee ((x \to y)\overline{z}).$$

Какие из переменных существенные, а какие — несущественные (фиктивные)?