Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Вторая неделя (14 – 15 сентября 2021)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Доказать, что для биномиальных коэффициентов выполняются следующие равенства:

(a) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
(b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;
(c) $C_{n-k+1}^k - C_{n-k-1}^{k-2} = C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{n}{n-k}\, C_{n-k}^k$.

Задача 2. Используя метод математической индукции, доказать равенство для всех $n \geq 0$.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Задача 3. Вычислить суммы:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$; c) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k}$; d) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k+1}$;

e) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$; f) $\sum\limits_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n}{k}$; j*) $4\sum\limits_{k} \binom{n}{4k}$.

Задача 4. «Словом» будем называть любую конечную последовательность из букв некоторого алфавита.

В некотором языке алфавит состоит из букв «А», «Б», «В», «О», «Ы». Сколько в этом языке

(a) слов длины 2, у которых первая буква гласная, а вторая согласная?
(b) слов длины 4?
(c) слов длины 4, не начинающихся с буквы В?
(d) слов длины 4, у которых первая буква не совпадает со второй?
(e) слов длины 4, у которых все буквы различны?
(f) слов, у которых все буквы различны?
(g) слов длины 4, у которых все буквы различны и первая не является буквой «А»?
(h) слов, у которых все буквы различны и последняя не является буквой «А»?
(i) слов длины 4, содержащих ровно одну букву «Б»?

Задача 5. В автобусе 20 свободных мест. Вошли (a) 25; (b) 5 человек. Сколько есть вариантов рассадить их по свободных местам (каждый вошедший пассажир должен сесть на своё место, стоячих остаться не должно)?

Задача 6. Есть 10 человек. Сколько есть способов составить из части из них колонну длиной (a) 3; (b) 11; (c) 10 человек?

Задача 7. Для бизнес-ланча предлагается на выбор 3 варианта горячего и 4 варианта супа. Сколько всего вариантов бизнес-ланча можно заказать?

Задача 8. Из города A в город B идут три дороги, а из города B в город C — 4 дороги. Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

Задача 9. Для бизнес-ланча предлагается на выбор 4 варианта горячего, 2 варианта супа и 3 варианта салата. Сколько всего вариантов бизнес-ланча можно заказать?

Задача 10. В офисе стоит a) 10; b) 7 компьютеров, каждый соединен сетевым проводом с тремя другими. Сколько всего проводов?

Задача 11. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды?

Задача 12. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

Задача 13. a) Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых цифры расположены по убыванию? b) А пятизначных? c) А если снять ограничение на число знаков?

Задача 14. Сколькими различными способами можно прочитать слово «строка», двигаясь вправо или вниз?:

С	Т	Р	О	К	А
Т	Р	О	К	А	
Р	О	К	А		
О	К	А			
К	А				
А					

Задача 15. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого — 8. (Все книги — разные.) Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Задача 16. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 17. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

Задача 18. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть ровно три единицы?

Задача 19. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский, пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Выяснить:

(a) сколько человек знают все три языка;
(b) сколько человек знают ровно два языка;
(c) сколько человек знают только английский язык.

Задача 20. (a) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

(b) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.

(c) Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

Задача 21. Пусть U — множество из n ($n \geq 3$) элементов.

(a) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$.
(b) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $|X \triangle Y| = 1$.
(c) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$, $|X| \geq 2, |Y| \geq 3$.
(d) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $|X \triangle Y| = 1$, $|X| \geq 2, |Y| \geq 3$.

Рекомендуем пытаться сделать эти задачи, только если вы уверенно можете решить все задачи из перечисленных выше (готовы сходу рассказать их решения).

Задача 22. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр (возможно, совпадающих; номер может начинаться с нуля). Сколько существует билетов, номер которых не содержит единиц, но содержит хотя бы одну двойку?

Задача 23. Сколько способов

(a) Рассадить 5 человек по пятиместной карусели?
(b) Покрасить пятиместную карусель в два цвета?

Задача 24. (*) Сколько «слов» (не обязательно осмысленных) длины 7 в русском языке содержит две буквы «н», идущие подряд?

Комбинаторика (числа Фибоначчи)

Последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ чисел Фибоначчи определяется рекуррентным образом: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при всех n, $n \geq 2$.

Задача 25. Пусть φ — «золотое сечение», т. е. $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Доказать, что тогда для n-го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:

a) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n} \right)$ (формула Бине);

b) $f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil$.

Доказать, что элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:

c) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

d) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

e) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

f) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

g) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;

h) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1} = f_{n+1} f_{m+1} - f_{n-1} f_{m-1}$;

i) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;

Задача 26. Доказать, что любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq 1$, $i = 2, 3, \ldots$

Задача 27. Для всех $n \geq 0$ докажите равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = f_{n+1}.$$

Комбинаторика (разное)

Задача 28. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 29. Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

Задача 30. Пусть $N(r)$ — количество предметов, обладающих ровно r свойствами, $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами. Докажите равенства

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k.$$

Задача 31. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

Задача 32. Доказать, что любые два соседних члена последовательности Фибоначчи не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

Задача 33. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа?

Задача 34. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа, считая при этом, что числа 1 и n — тоже соседние?

Задача 35. На окружности отмечены $2n$ различных точек. Сколькими способами их можно разбить на n пар, соединив непересекающимися отрезками?