Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Первая неделя (8 – 9 сентября 2021 года)
В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Элементы теории множеств.

Задача 1. Про множества A и B известно, что $|B| \leqslant |A|$. Верно ли, что $B \subseteq A$? (через $|A|$ обозначается число элементов множества A.)

Задача 2. Известно, что $|A| = 3$, $|B| = 5$. Верно ли, что $|A \triangle B| \leqslant 5$? Какие значения может принимать число $|A \triangle B|$?

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны для любых множеств A, B и C:
a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$; d) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$; e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$?

Задача 4. Нарисуйте все отображения
(a) из множества $\{1, 2, 3\}$ в множество $\{1, 2\}$;
(b) из множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, 3\}$.
Какие отображения из множества 1, 2, 3 в себя могут быть получены композицией отображений из пунктов a) и b)?

Задача 5. Среди следующих отображений укажите все биекции, инъекции и сюръекции:
(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $x \to nx$, $n \in \mathbb{Z}$;
(b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, где $x \to bx$, $b \in \mathbb{Q}$;
(c) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $x \to x^2$;
(d) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $x \to x^2$;
(e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $x \to x^3$.
Какие из отображений обратимы?

Задача 6. На окружности отмечены 1000 белых точек и одна черная. Чего больше: треугольников с вершинами в белых точках или четырехугольников, у которых одна вершина черная, а остальные три —белые?

Задача 7. Из ста женщин африканского племени Мумбо-Юмбо 40 умеют делать ожерелья из кокосов, 70 умеют вязать набедренные повязки из банановой травы и 30 женщин умеют делать оба дела. Сколько женщин в племени не смогут сделать ни того, ни другого?

Задача 8. В том же самом племени Мумбо-Юмбо из предыдущей задачи существует особый класс женщин (всего 15), способных изловить и приготовить слона. Известно, что 7 женщин могут приготовить слона и сделать ожерелье, 5 женщин смогут приготовить слона и связать повязку и только три женщины умеют делать все три дела. Сколько дам в племени не могут сделать ничего (ни изловить и приготовить слона, ни сделать повязку, ни сделать ожерелье)?

Задача 9. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.

Задача 10. (Льюис Кэрролл) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

Задача 11. Докажите, что
- (a) множество точек отрезка $[5, 3]$ и отрезка $[15, 33]$ равномощны;
- (b) интервал $(0, 1)$ и луч $(0, \infty)$ равномощны.

Задача 12. Счётно ли объединение
- (a) конечного множества со счётным множеством;
- (b) конечного числа счётных множеств;
- (c) счётного числа счетных множеств?

Задача 13. Счетно ли любое бесконечное множество непересекающихся
- (a) интервалов на прямой, имеющих длину больше 1;
- (b) любых интервалов на прямой;
- (c) кругов на плоскости;
- (d) «восьмёрок» на плоскости (восьмёрка — это любые две окружности, касающиеся внешним образом);
- (e) букв «T» на плоскости?

Задача 14. Верно ли, что квадрат со стороной единица равномощен отрезку $[0, 1]$?

Метод математической индукции.

Задача 15. Доказать, что при любом натуральном n число $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6.

Задача 16. Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа истинно следующее утверждение: число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

Задача 17. Докажите неравенство $n! \geq 2^{n-1}$.

Задача 18. Докажите неравенство $3^n \geq n^2$.

Задача 19. Докажите равенство $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Задача 20. Докажите равенство $1 \times 1! + 2 \times 2! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$.

Задача 21. Для всех $n \geq 2$ докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Задача 22. Доказать утверждение методом математической индукции:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad (n \geq 2).$$

Задача 23. Докажите неравенство

$$2!4!\ldots(2n)! > ((n+1)!)^n, \quad (n > 2).$$

Задача 24. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Задача 25. Доказать, что, имея гирьки весом 3 г и 5 г (в неограниченном количестве), можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой n г, где n — натуральное число, превосходящее 7.

Задача 26. Егор Иванович умеет рвать клочок бумаги на 4 и 6 кусочков. Верно ли, что Е. И. сможет порвать клочок бумаги на любое число частей n (где $n > 8$)?

Задача 27. В кругу друзей Александра Сергеевича из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная только ему одному. Друзья могут встретиться, и за одну встречу каждый может узнать все новости, известные другому. Проблема в том, что встречаться можно только по двое. Александр Сергеевич догадался, что что за $2k - 4$ встречи все k людей смогут узнать все новости. Почему?

Задача 28. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geq 1$. Найдите a_n.

Задача 29. На какое наибольшее число частей могут делить плоскость n прямых?

Задача 30. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

Задача 31. Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ – простое при любом натуральном n?

Задача 32. (a) Показать, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 3$.

(b) Показать, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 3$ (всего n корней, $n \geq 1$.)

Задача 33. Задача о ханойской башне. Даны три стержня, на которых помещены диски различного размера. Исходно все n дисков лежат на первом стержне, таким образом, что каждый меньший диск лежит на большем. Требуется переместить все диски на третий стержень. Диски можно перекладывать со стержня на стержень по одному, причем запрещено класть больший диск на меньший. Ханойская башня «собрана», когда все диски лежат на третьем стержне.

(a) Докажите, что для любого n ханойская башня может быть собрана.

(b) Докажите, что ханойскую башню из n дисков невозможно «собрать» меньше, чем за $2^n - 1$ ходов.

Задача 34. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можносливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Задача 35. Имеется два стакана, в первом стакане налито некоторое количество воды, а во втором — такое же количество спирта. Разрешается переливать некоторое количество жидкости из одного стакана в другой (при этом раствор равномерно перемешивается). Можно ли с помощью таких операций получить в первом стакане раствор, в котором процентное содержание спирта больше, чем во втором?