Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Большое домашнее задание (12 – 22 октября 2021 года)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Далее в работе N — количество букв в полном имени выполняющего работу, M — количество букв в фамилии (если количество букв в фамилии меньше пяти, то берём $M = 5$.), A — количество гласных букв в имени (если количество гласных букв в двух меньше двух, то берём $A = 2$.), B — количество гласных букв в фамилии (если количество гласных букв в двух меньше двух, то берём $B = 2$.),

Задача 1. Пусть S, Q — некоторые множества, $|S| = M$, $|Q| = N$. Какое значение может принимать мощность множеств $|S \cup Q|$, $|S \cap Q|$, $|S \backslash Q|$, $|S \triangle Q|$?

Задача 2. Петя собирается все $2MN$ каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — решать задачи по математике, а каждый пфтый день — ездить в магазин за продуктами. (В первый день Петя сделал и первое, и вторoе, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

Задача 3. Встречается ли в треугольнике Паскаля число $M * N + 2021$?

Задача 4. Существуют ли такие множества P, Q, S, что

$$P \cap Q \neq \varnothing, \quad P \cap S = \varnothing, \quad (P \cap Q) \backslash S = \varnothing?$$

Если да, приведите какой-нибудь пример. Если нет, докажите почему.

Задача 5. Доказать неравенство (всё решение, включая необходимые подсчёты, должно быть приведено в работе)

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2021}} > \sqrt{2021}$$

Задача 6. В выражении $(B + x + y)^{(M+N+A)}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты будут при следующих слагаемых?
(a) $x^M y^{(N+A)}$;
(b) $x^M y^N$;
(c) y^A?

Задача 7. Найти количество слов длины $(M + N)$ в русском алфавите, в которых буквы идут в алфавитном порядке (напирмер, *агду*, *пръя*, *аря*).

Задача 8. Сколькими способами можно начинить MN блинов, если имеется $(M + N)$ начинок (каждый блин должен быть с начинкой) и выполняются следующие условия:
(a) блины остаются на тарелке;
(b) блины остаются на тарелке, каждая начинка используется хотя бы один раз;
(c) блины раздают гостям (гостей всего $M + N$, каждому должен достаться блин);

(d) блины блины раздают гостям, каждая начинка используется хотя бы один раз (гостей всего $M + N$, каждому должен достаться блин).

Задача 9. Доказать, что любое число квадратов может быть разрезано так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат.

Задача 10. (a) Старший брат Миша получил $6M + A$ разных пирожных. Он их делит между собой и своими двумя сёстрами. Сколькими способами он может поделить, если младенцу Наталии не стоит есть больше, чем A пирожных (но хотя бы одно ей выдать нужно), а с Ириной надо поделиться поровну?

(b) В семье появился ещё один ребёнок. Теперь младшему Петру надо выдать выдать хотя бы одно пирожное, но не более A, а с сёстрами поделиться поровну.

Задача 11. Представить в виде СДНФ следующие функции:

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \to x_3$;
(b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2x_3)$;
(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \oplus x_2)\&(x_3 \to \overline{x}_2x_4)$;
(d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0100100011000010)$.

Задача 12. Представить в виде СКНФ следующие функции:

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2)$;
(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_3$;
(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \to (x_2 \to x_3x_4)$;
(d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0110111011100101)$.

Задача 13. Методом неопределённых коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих фукнций:

(a) $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$;
(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to x_3)$;
(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0000100010010000)$.

Задача 14. Используя эквивалентные преобразования, найти полиномы Жегалкина для следующих фукнций:

(a) $f(x_1, x_2) = x_1 \to (x_2 \to \overline{x}_1x_2)$;
(b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3))((x_1 \to x_2) \to x_3)$;
(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1x_2x_3$.

Задача 15. Найти хотя бы одно решение в целых числах уравнений

(a) $1611x + 689y = 1$
(b) $551Mx + 391y = A$
(c) $2597x + 173Ny = B$.

(или показать, что таких чисел нет).

Задача 16. На сколько нулей заканчивается число $(2021A + B)!$ (в десятичной записи)?

Задача 17. Найти наибольший общий делитель чисел $M * N * 3424 + 1$ и $(M + N) * 2350 + 1$.

Задача 18. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^4 + x^3 + (A+B)x^2 + Bx + AB$ и $x^4 + 3x^3 + (2 + A + M)x^2 + (M + 2A)x + AM$.

Задача 19. На множестве натуральных чисел задан предикат $D(x, y)$, который принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда x делится на y. Используя символы функций алгебры логики, предикат $D(x, y)$, кванторы всеобщности и существования, записать следующие предикаты.

(a) $P_{=1}(x)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда $x = 1$;
(b) $P_{=}(x, y)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда $x = y$;
(c) $P_{pr}(x)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда x — простое число.

Задача 20. Найдите остаток от деления числа 2020^{2021} на

$$3; \quad 5; \quad 7; \quad 15.$$

Задача 21. Найти наименьшее трёхзначное шестнадцатиричное число, двоичная запись которого содержит ровно 5 нулей.

Задача 22. Перевести число $3A5{,}2B6_{10}$ (здесь A и B цифры, заданные в самом начале работы) в системы счисления с основаниями 2, 3, M, N (с точностью до 5 знаков после запятой).

Задача 23. На доске написано число $589\,173\,256\,479\,45A\,4B6$ (здесь A и B цифры, заданные в самом начале работы). Раз в пять минут к доске подходит Саня, стирает написанное число и пишет вместо него сумму его цифр. Через некоторое время на доске осталась одна цифра. Какая?

Задача 24. Случайным образом выбирается подмножество множества $\{1, 2, \ldots, M * 500\}$. Какова вероятность того, что ни один из элементов выбранного подмножества не делится ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Задача 25. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трех направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через C) записана единица. Через кубик C проходит три слоя параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.