1 Функции алгебры логики

1.1 Базовые понятия (раздел не завершён!)

Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определённые на множестве наборов из нулей и единиц и принимающие на каждом из этих наборов значения 0 или 1, будем называть *функциями алгебры логики* или *булевыми функциями*. Поскольку число наборов длины n из нулей и единиц конечно, то любая функция может быть полностью задана таблицей ({таблица истинности}).

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
		$\ldots$			$\ldots$
σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_{n-1}	σ_n	$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$
		$\ldots$			$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Можно также сказать, что функция алгебры логики — это совокупность отображения множества наборов из нулей и единиц длины n в множество $\{0, 1\}$ и упорядоченный набор переменных. Таким образом, одинаковые функции алгебры логики — это функции от одних и тех же переменных и принимающие на всех наборах одинаковые значения. Множество всех функций алгебры логики будем обозначать P_2. Множество всех функций алгебры логики от переменных $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать $P_2(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 1. *Число функций алгебры логики от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ равно 2^{2^n}.*

Пример 1. $|P_2(x)| = 2^{2^1} = 4$, $|P_2(x_1, x_2)| = 2^{2^2} = 16$, $|P_2(x_1, x_2, x_3)| = 2^{2^3} = 256$, $|P_2(x_1, x_2, x_3, x_4)| = 2^{2^4} = 256^2 = 65536$, $|P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)| = 2^{2^5} = 65536^2 > 4,2 \cdot 10^9$, $|P_2(x_1, x_2, \ldots, x_{10})| = 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10 \cdot 102} = 1024^{102} > 10^{3*102} = 10^{306}$

$f(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от переменной x_i существенно (x_i — существенная переменная функции f) тогда и только тогда, когда существует набор из $n-1$ нулей и единиц $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ из $\{0, 1\}^{n-1}$ такой, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. В противном случае x_i — несущественная (фиктивная) переменная.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$, заданную таблицей истинности:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Переменная y — несущественная (фиктивная).

Если x_i — фиктивная переменная, то для любого набора из $n-1$ нулей и единиц $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0,\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) =$

$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Поскольку это равенство выполняется для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, то $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.[1] Функция $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется функцией, полученной из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ путём удаления несущественной переменной x_i.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$ из примера **??**, у которой переменная y является несущественной. Тогда функция $g(x, z)$, заданная следующей таблицей, получена из функции $f(x, y, z)$ путём удаления несущественной переменной y.

x	z	$g(x,z)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим в некотором смысле обратую операцию добавления фиктивной переменной. Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Построим функцию $h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, значение которой определяется следующим образом: $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Будем говорить, что фукция h получилась из функции f добавлением несущественной переменной. Отметим, что операция добавления несущественной переменной является неоднозначной, так как добавляться могут различные переменные.

Пример 4. Рассмотрим функцию $g(x, z)$ из примера **??**. Добавлением несущественной переменной из неё можно получить функцию $f(x, y, z)$ из примера **??**, а можно, например, функцию $f_1(u, x, z)$, заданную следующей таблицей.

---

[1]Вообще, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ могут быть как одной и той же, так и различными функциями. Рассмотрим, например, следующую функцию:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Тогда

y	z	$f(0,y,z)$	$f(1,y,z)$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	0

При этом функции $g(y, z) = f(0, y, z)$ и $h(y, z) = f(1, y, z)$ являются функциями от двух переменных y и z.

u	x	z	$f(u,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Две функции называются равными, если они получаются друг из друга в результате добавления и (или) удаления несущественных переменных. Так, например, функции из примеров **??**, **??** и **??** являются равными (хотя таблицы и даже число переменных у них различается).

to be contunued

2 Функция, равная 1 ровно на одном наборе

Рассмотрим конъюнкцию переменных $x_1, \dots, x_n$: $x_1 x_2 \cdots x_n$. Эта функция равна единице на наборе, состоящем из одних единиц и равна нулю на всех остальных наборах. Построим функцию, которая равна единице ровно на одном выбранном наборе.

Введём функцию

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Эта функция обладает следующим свойством: x^σ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда x принимает значение σ (проверяется по определению фукнции x^σ.). Следовательно, конъюнкция

$$x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$$

принимает значение 1 на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, а на всех останльных наборах равна нулю.

Пример 5. Запишем формулу указанного вида для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{10})$, принимающей значение 1 на наборе (0111001011) и равной нулю на остальных наборах.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^0 x_6^0 x_7^1 x_8^0 x_9^1 x_{10}^1 = \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x}_5 \overline{x}_6 x_7 \overline{x}_8 x_9 x_{10}.$$

3 Пример построения СДНФ

СДНФ — дизъюнкция элементарных конъюнкций, то есть таких конъюнций, в которые входит каждая переменная или её отрицание.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) | f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Поясним эту запись. Дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, на которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна 1. В каждую конъюнкцию входит либо переменная (если соответствующая $\sigma_k = 1$), либо отрицание переменной (если соответствующая $\sigma_k = 0$.)

Пример 6. Построим СДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

СДНФ включает в себя конъюнкции по тем наборам, на которых функция равна 1. В данном случае это наборы (0,0,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,0,1,1) и (1,1,0,1). Каждому набору соответствует конъюнкция, которая равна единице на этом наборе и нулю на всех остальных. В данном случае это следующие конъюнкции: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$, $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$, $\overline{x}_1x_2x_3x_4$, $x_1\overline{x}_2x_3x_4$ и $x_1x_2\overline{x}_3x_4$. Таким образом, СДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет вид $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4$.

4 Пример построения СКНФ

. Выше была построена функция, которая равна единице на одном заданном наборе. Аналогичным образом можем построить функцию, которая равна нулю на заданном наборе — дизъюнкцию переменных (соответствуют нулевым компонентам набора) и отрицаний переменных (соответствуют единичным компонентам набора).

Пример 7. Запишем формулу указанного вида для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, приниающей значение 0 на наборе (1010100010) и равной единице на остальных наборах.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5' \vee x_6 \vee x_7 \vee x_8 \vee \overline{x}_9 \vee x_{10}.$$

Далее, соединяя конъюнкцией функции, принимающие значение 0 ровно на одном наборе, можем получить любую функцию.

СКНФ — конъюнкция элементарных дизъюнкций, то есть таких дизъюнций, в которые входит каждая переменная или её отрицание.

$$f(x_1, \ldots, x_n) =_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) | f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$