0.1 Метод математической индукции

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения, зависящего от натурального параметра (номера). Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — база (базис) индукции, а затем доказывается, что если верно утверждение с номером n, то верно и следующее утверждение с номером $n+1$ — шаг индукции, или индукционный переход.

Сформулируем принцип математической индукции более формально (более точно и строго). Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$.

Для этого достаточно сначала установить истинность утверждения P_1 (проверить базу индукции), а затем доказать, что для любого номера n если справедливы утверждения $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то будет верным и утверждение P_n (переход индукции). Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнём первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.

Примеры решения задач методом математической индукции (по индукции).

Задача 1. Докажите, что число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех целых неотрицательных n.

Решение.

База индукции Проверим утверждение для $n = 0, 1:$

$$5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16;$$
$$5^1 - 4 \cdot 1 + 15 = 16.$$

Индуктивный переход Предположим, что для всех $k < n$ равенство выполняется. Покажем, что равенство верно для $k = n$.

$$5^n - 4n + 15 = 5 \cdot 5^{n-1} - 20n + 20 + 75 + 20n - 20 - 75 - 4n + 15 =$$
$$= 5 \cdot (5^{n-1} - 4(n-1) + 15) + 16(n-5)$$

По предположению индукции первое слагаемое делится на 16. Поскольку второе слагаемое также делится на 16, то и выражение делится на 16 при $k = n$. Следовательно, число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех целых неотрицательных n.

....

Задача 2. Доказать, что, имея гирьки весом 3 г и 5 г (в неограниченном количестве), можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой n г, где n — натуральное число, превосходящее 7.

Решение. Разобьём веса на тройки вида $3m-1$, $3m$ и $3m+1$, где m — натуральное число, превосходящее 2. Нетрудно видеть, что любое натуральное число больше 7 попадает в одну из этих троек. Индукцию будем вести по m **База индукции** Проверим утверждение для $m = 3$. Если вес груза 8 г, то используется по одной гирьке 3 г и 5 г, если вес груза 9 г, то используются 3 гирьки по 3 г, если вес груза 10 г, то используется две гирьки по 5 г.

Индуктивный переход Предоположим, что для всех $k = m - 1$ утверждение доказано. Покажем тогда, что используя заданные гирьки, можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой $3m - 1$, или $3m$, или $3m + 1$. По предположению индукции, используя гирьки весом 3 г и 5 г, можно уравновесить весы, на одной чаше готорых находится груз массой $3(m-1)-1$, или $3(m-1)$, или $3(m-1)+1$. Добавляя к гирькам ещё одну гирьку весом 3 г, мы можем уравновесить весы с грузом весом $3m-1$, или $3m$, или $3m+1$ соответственно. Следовательно, можно уравновесить весы с грузом массы n, где n — любое натуральное число, превосходящее 7.

....

Задача 3. Доказать, что число $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ является полным квадратом для любого натурального n.

Решение. Доказать требуемый факт «в лоб», в том числе и по индукции, — задача, к которой даже непонятно как подтупаться. Для того, чтобы решить задачу, формально усложним себе жизнь, усилив доказываемое утверждение до следующего: доказать для любого натурального n равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

В такой постановке утверждение уже несложно доказывается по индукции (здесь, правда, за кадром остается вопрос о том, как догадаться до доказываемого равенства).

База индукции Проверим утверждение для $n = 1, 2$:

$$1^3 = 1^2;$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2.$$

Отметим, что в правой части равенства находится квадрат суммы арифметической прогрессии. Поэтому исходное равенство можно переписать в виде

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Индуктивный переход Предоположим, что для $k = n$ утверждение выполняется. Проверим справедливость утверждения для $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = {} & \text{(по предположению индукции)} \\ = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = {} & \\ (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 & \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение выполняется для $k = n + 1$. А значит, утверждение выполняется для всех натуральных n.

....

Примеры ошибок в доказательстве по индукции.

Пример 1. Утверждение: если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то из любого города можно попасть в любой другой город страны.

Доказательство. Индукция по числу городов. База, $n = 2$ (страна из двух городов), очевидна. Проведем индукционный переход. Возьмем произвольную страну с n городами и добавим к ней новый город, из которого выходит хотя бы одна дорога. Эта дорога ведет в один из старых городов. По предположению индукции из любого старого города можно попасть в любой другой старый город. Следовательно, из нового города можно попасть в любой старый город (и наоборот). Значит, из любого города можно попасть в любой другой город. Утверждение доказано по индукции.

Пример 2. Утверждение: у любых n девушек глаза одинакового цвета.

Доказательство. Индукция по n (числу девушек). Для $n = 1$ утверждение, очевидно, верно (хотя и бессодержательно). Остаётся перейти от n к $n+1$. Пусть установлено, что у любых n девушек глаза одинакового цвета. Покажем, что тогда у любых $n+1$ девушек глаза одинакового цвета. Действительно, если рассмотреть всех девушек, кроме последней, то по предположению индукции у них у всех глаза одикового цвета. Теперь рассмотрим всех девущек, кроме первой. У них по предположению индукции все глаза одинакового цвета (естественно, того же самого цвета). Поэтому у всех $n + 1$ девушек глаза одинакового цвета. Утверждение доказано по индукции

Пример 3. Утверждение: насыпать кучу из манки (манной крупы) невозможно.

Доказательство. Индукция по числу крупинок n. База индукции: одна крупинка, конечно, не является кучей. Пусть теперь насыпано n крупинок, и насыпанное не является кучей. Тогда добавление одной маленькой крупинки манки, безусловно, не превратит высыпанное в кучу.