1 Введение

Дискретная математика изучает математические объекты и системы дискретного характера. Примеры таких объектов: натуральные числа, двоичные слова (битовые строки), конечные множества элементов любой природы и многое другое. Возникновение дискретной математики относится к глубокой древности. Предметом дискретной математики уже в те времена было решение трудных комбинаторно-логических задач, разработка эффективных алгоритмов выполнения арифметических действий, решение уравнений в целых числах, шифрование и дешифрование секретных сообщений. Позднее возникли важнейшие разделы дискретной математики: комбинаторный анализ, теория графов, алгебра логики, теория кодирования, дискретная геометрия и другие.

2 Множества

2.1 Основные определения

Понятие множества относится к первичным понятиям, так как нет других, более простых понятий для их определения. Чаще всего под этим словом подразумевается примерно то же самое, что и под словами совокупность, семейство, неупорядоченный набор каких-либо предметов, понятий, объектов. Важно, что эти предметы (понятия, объекты) не повторяются и не упорядочены. Предметы (понятия, объекты), входящие в множество A, будут называться элементами множества A. Отметим, что множества могут быть сами элементами другого множества.

Пример 1. Рассмотрим множество студентов группы 212 образовательной программы ФиКЛ. Элементами этого множества являются студенты. При этом сама группа, например, входит в множество групп первого курса факультета гуманитарных наук. Если же мы рассмотрим, например, множество объектов, относящихся к первому курсу НИУ ВШЭ и имеющие электронные адреса, то в это множество попадут и сами студенты группы 212, и сама группа 212.

Для выражения того факта, что некоторый элемент a принадлежит (соответственно не принадлежит) множеству A используется обозначение $a \in A$ (соотв. $a \notin A$).

Два множества A и B считаются *равными* в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Обозначается $A = B$.

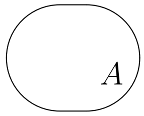
Как мы можем задавать или описывать множества? Самый простой способ — перечислением его элементов. Например,

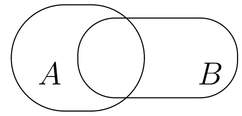
$$A = \{\text{Петя, Вася, Маша}\}.$$

Список студентов группы можно также рассматривать как задание множества перечислением. Можно задавать множества описанием, например

$$A = \{\text{студенты 1 курса ФГН, посещающие курс дискретной математики}\}.$$

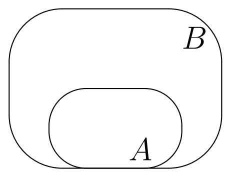
Очень полезным оказывается схематическое, графическое изображение множеств. Для множества A рисуем некоторую фигуру (которую нам удобно). Точки этой фигуры или некоторые точки внутри этой фигуры будут обозначать элементы множества A. Если необходимо рассматривать несколько множеств, то нужно нарисовать соответствующее число фигур.





Такие изображения называются кругами Эйлера[1]. Они помогают наглядно представить себе взаимное расположение множеств и подсказать возможные пути решения, однако их нельзя использовать для строгих доказательств (в том числе и в решении задач недостаточно приводить лишь изображение множеств кругами Эйлера).

Подмножества. Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то A называется *подмножеством* множества B. Обозначается $A \subseteq B$.



Из определений ясно, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$, $B \subseteq A$. По этой причине доказательства того, что какие-то множества равны, обычно распадаются на две части: в первой части доказывают, что $A \subseteq B$, а во второй — что $B \subseteq A$.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется пустым и обозначается через $\varnothing$[2].

Отметим некоторые свойства множеств. Пусть A — произвольное множество.

1. $\varnothing \subseteq A$.
2. если $A \subseteq \varnothing$, то $A = \varnothing$.
3. $A \subseteq A$.
4. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

[1] В переводных источниках можно чаще встретить понятие «Диаграммы Венна». Круги Эйлера (которые необязательно круги), в отличие от диаграмм Венна изображают отношения между множествами: непересекающиеся множества изображены непересекающимися фигурами на плоскости, а подмножествам соответствуют вложенные фигуры.

[2] Отметим, что пустое множество единственное для любых задач и описаний. Например, если мы в одном случае говорим про студентов, а в другом случае — про книги, то в обоих случаях пустое множество будет одно и то же.

2.2 Операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и не содержит никаких других элементов. Обозначается $A \cup B$.

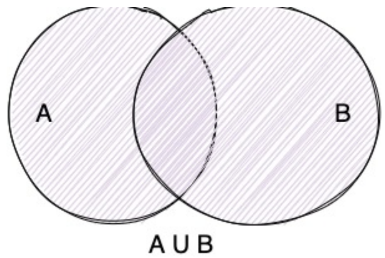


Рис. 1:

Пересечением множеств A и B называется множество, элементы которого одновременно принадлежат множеству A и множеству B. Обозначается $A \cap B$.

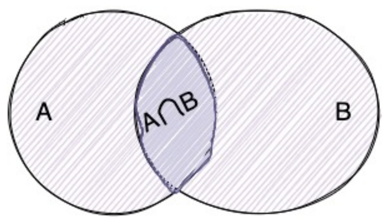


Рис. 2:

Разностью множеств A и B называется множество тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Обозначается $A \backslash B$.

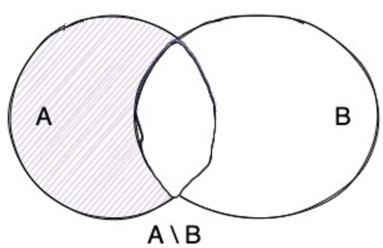


Рис. 3:

Дополнением множества A (или отрицанием множества A) называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству A. Обозначается $\overline{A}$.

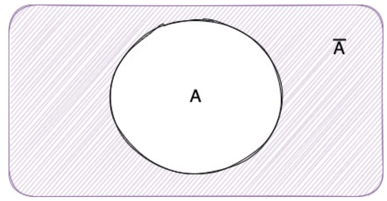


Рис. 4:

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B. Обозначается $A \triangle B$.

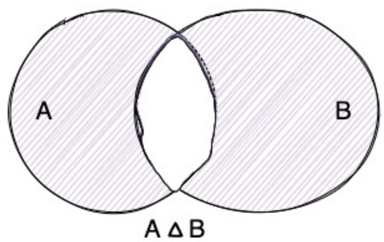


Рис. 5:

Свойства операций над множествами. Пусть A, B, C — произвольные множества.

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$.

2. $A \cap A = A \cup A = A$.

3. Если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

4. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

7. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

8. $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

2.3 Отображения множеств

Пусть заданы множества X и Y. Отображением f множества X в множество Y называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y. Часто используется обозначение $f : X \to Y$.

Пример 2. Функции, заданные на множестве действительных чисел $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Например $f(x) = x^2$; $f(x) = \sin x$.

Пример 3. чётные числа: $1 \to 2$, $2 \to 4, \ldots$, $s \to 2s$, $\ldots$

Пример 4. Отображение множества студентов НИУ ВШЭ в множество номеров студенческих билетов.

Выделяют следующие типы отображений:

Сюрьективное отображение (*сюрьекция, отображение «на»*) — отображение вида $f : X \to Y$, при котором для любого элемента y из множества Y найдётся элемент x из множества X, такой что $f(x) = y$.

Иньективное отображение (*иньекция*) — отображение вида $f : X \to Y$, при котором различным элементам множества X поставлены в соответствие различные элементы множества Y. Иными словами, в любой элемент y из множества Y отображается либо один элемент из множества, либо таких элементов нет вообще.

Биективное отображение (*биекция, взаимо однозначное отображение*) — отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным.

Пример 5. Отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу $n \to 2n$ является инъекцией.

Пример 6. Отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по правилу $n \to -n$ является биекцией.

Пример 7. Отображение множества студентов НИУ ВШЭ на множество номеров студенческих билетов является инъекцией.

Пример 8. Отображение $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ по правилу $x \to \sin x$ является сюръекцией.

2.4 Мощность множеств

Множества X и Y называют *равномощными*, если можно построить взаимно однозначное отображение из множества X в множество Y. Отметим, что два конечных множества, состоящих из одного и того же числа элементов, равномощны.

Для бесконечных множеств понятие «число элементов» неприменимо, поэтому используется его обобщение. Мощность множества — характеристика как конечных, так и бесконечных множеств, обобщающая понятие «числа элементов» множества.

Среди бесконечных множеств выделим два «эталонных» множества — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Множества, равномощные множеству $\mathbb{N}$ (множеству натуральных чисел), называются *счётными.*

Множества, равномощные множеству $\mathbb{R}$ (множеству действительных чисел), называются множествами мощности *континуум*

Примером счётного множества является множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Построим биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Отобразим чётные числа в положительные по правилу $y = x/2$, а нечётные — в отрицательные и ноль по правилу $y = (1 - x)/2$. Данное отображение является биекцией. Следовательно, множество Z — счётно.

В заключение покажем, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ не являются равномощными. Предположим, что это не так и существует биекция между элементами множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$. Пусть натуральному числу i соответствует при это йбиекции действительное число α_i, которое представим в виде бесконечной десятичной дроби со знаком «$+$» или «$-$» перед самой дробью: $\alpha_i = a_{i0}, a_{i1}a_{i2}\dots a_{it}\dots$. (При этом для определённости предоставления запретим использование фрагмента (9) — «девять в периоде»). Тогда биекция имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccl}
1 & \leftrightarrow & a_{10}, a_{11}a_{12}\dots a_{1t}\dots \\
2 & \leftrightarrow & a_{20}, a_{21}a_{22}\dots a_{2t}\dots \\
3 & \leftrightarrow & a_{30}, a_{31}a_{32}\dots a_{3t}\dots \\
\vdots & \vdots & \qquad\quad \vdots \\
s & \leftrightarrow & a_{s0}, a_{s1}a_{s2}\dots a_{st}\dots \\
\vdots & \vdots & \qquad\quad \vdots
\end{array}$$

Определим число $\widetilde{\alpha} = 0, a_1a_2a_3\dots a_t\dots$ следующим образом. Пусть

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{ii} \neq 1; \\ 2, \text{ если } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Построенное число α не совпадает ни с одним числом из перечисленных выше (поскольку отличается от i-го числа в i-м знако после запятой). Следовательно, числу α из $\mathbb{R}$ не соответствует никакое натуральное число. Противоречие с тем, что рассмотренное отображением между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — биекция. А значит, эти множества не являются равномощными.