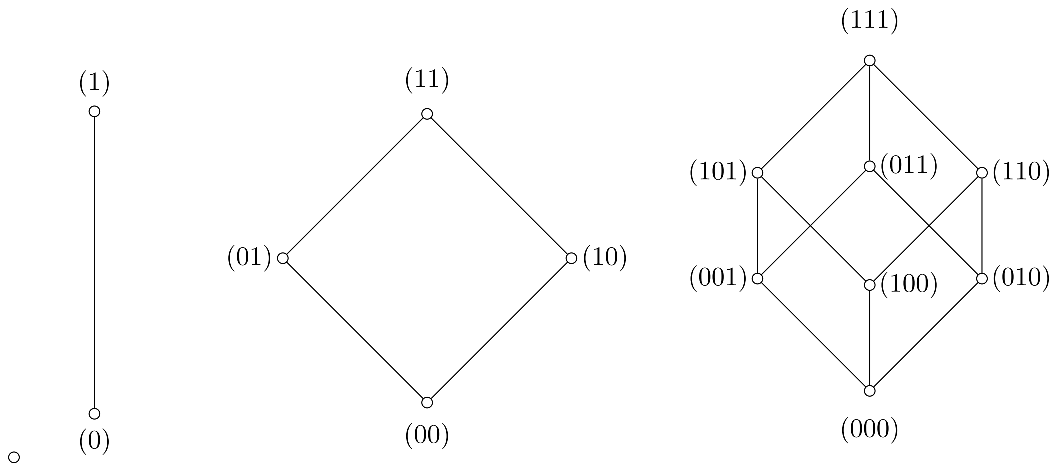
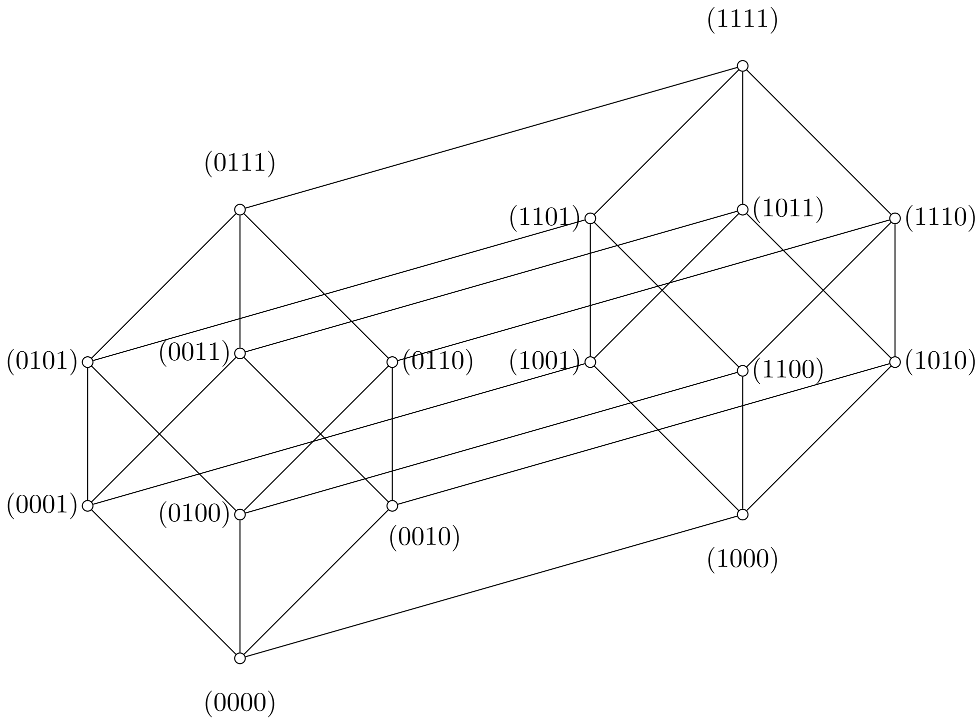
Школа лингвистики, 2021-22 уч. год
Дискретная математика
Булев куб (25 октября 2021 г.)

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

Булевым кубом V^n будем называть множество всех наборов из нулей и единиц длины n. Число таких наборов равно 2^n. С булевым кубом также ассоциируется граф $B^n = (V^n, E^n)$, также называемый булевым кубом, вершины которого помечены наборами из нулей и единиц длины n. При этом две несовпадающе вершины $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ соединены ребром в том и только том случае, когда они различаются ровно в одной компоненте. То есть найдётся такое i, $0 \leq i \leq n$, что $\alpha_i \neq \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$ при всех $j \neq i$. Такие наборы называются соседними (соседними по i-й компоненте.)

Ниже изображены булевы кубы B^1, B^2, B^3, B^4.





Будем говорить, что набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ не превосходит набор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Обозначается $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$. Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ называются *сравнимыми*, если $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ или $\widetilde{\beta} \preceq \widetilde{\alpha}$. В противном случае наборы называются *несравнимыми*. *Цепью* в булевом кубе называется множество попарно сравнимых наборов (то есть множество таких наборов, любые два из которых сравнимы). *Антицепью* в булевом кубе называется множество попарно несравнимых наборов.

Пример 1. Пусть $\widetilde{\beta} \in V^n$. Пусть в наборе $\widetilde{\beta}$ содержится k единиц (и $n-k$ нулей). Сколько существует наборов $\widetilde{\alpha} \in V^n$, таких что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$?

Поскольку $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, то из равенства $\beta_i = 0$ следует равенство $\alpha_i = 0$. Следовательно, набор $\widetilde{\alpha}$ может содержать единицы только на каких-то из k мест, на которых $\beta_i = 1$. А значит, число наборов $\widetilde{\alpha}$, таких что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, равно 2^k.

Пример 2. Пусть $\widetilde{\alpha} \in V^n$. Пусть в наборе $\widetilde{\alpha}$ содержится k единиц (и $n-k$ нулей). Сколько существует наборов $\widetilde{\beta} \in V^n$, таких что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$?

Поскольку $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, то из равенства $\alpha_i = 1$ следует равенство $\beta_i = 1$. Следовательно, набор $\widetilde{\beta}$ может содержать нули только на каких-то из $n-k$ мест, на которых $\alpha_i = 1$. А значит, число наборов $\widetilde{\beta}$, таких что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, равно 2^{n-k}.

Утверждение 1 (Неравенство Любеля-Мешалкина-Ямомото)**.** Пусть T — антицепь в B^n. Обозначим через T_k множество наборов из T, содержащих k единиц и $n-k$ нулей. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|T_k|}{C_n^k} \leq 1.$$

Доказательство. Пусть $T = \{\widetilde{\alpha^1}, \ldots, \widetilde{\alpha^s}\}$. Рассмотрим множество всех цепей максимально возможной длины, содержащих наборы $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$. Нетрудно показать, что число таких цепей равно $n!$. В самом деле, при построении такой цепи от нулевого набора к единичному, мы можем на каждом шаге менять один из нулей на единицу, всего же таких «порядков замены» существует $n!$. Поскольку никакие наборы в антицепи не являются сравнимыми, то никакая цепь не может содержать больше одного набора из антицепи. А значит, сумма числа максимальных цепей, проходящих через каждый набор антицепи, не больше числа всех максимальных цепей.

Посчитаем число цепей, проходящих через произвольных набор $\widetilde{\alpha}$, содержащий k единиц и $n-k$ нулей. Аналогично подсчёту общего количества максимальных цепей получаем, что число цепей, содержащих максимальано возможное число элементов, которые начинаются в нулевом наборе и заканчиваются в наборе $\widetilde{\alpha}$ равно $k!$, а число цепей, которые начинаются в наборе $\widetilde{\alpha}$ и заканчиваются в единичном наборе равно $(n-k)!$. Следовательно, число максимальных цепей, проходящих через набор $\widetilde{\alpha}$, равно $k!(n-k)!$. Тогда число цепей, проходящих черзе все наборы множества T_k равно $|T_k| \cdot k!(n-k)!$, а число цепей, проходящих через все наборы множества T равно

$$|T_0| \cdot 0!n! + |T_1| \cdot 1!(n-1)! + |T_2| \cdot 2!(n-2)! + \ldots + |T_{n-1}| \cdot (n-1)!1! + |T_n| \cdot n!0! = \sum_{k=0}^{n} |T_k| \cdot k!(n-k)! \leq n!.$$

Последнее неравенство выполняется в силу того, что никакая цепь не может содержать больше одного набора из антицепи. Разделим все части этого соотношения на $n!$:

$$|T_0| \cdot \frac{0!n!}{n!} + |T_1| \cdot \frac{1!(n-1)!}{n!} + |T_2| \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} + \ldots + |T_{n-1}| \cdot \frac{(n-1)!1!}{n!} + |T_n| \cdot \frac{n!0!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} |T_k| \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1.$$

Следовательно,

$$\frac{|T_0|}{C_n^0} + \frac{|T_1|}{C_n^1} + \frac{|T_2|}{C_n^2} + \ldots + \frac{|T_{n-1}|}{C_n^{n-1}} + \frac{|T_n|}{C_n^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{|T_k|}{C_n^k} \leq 1.$$

□

Теорема 2. *Максимальная мощность антицепи в n-мерном булевом кубе B^n равна*[1] $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

[1] $\lfloor x \rfloor$ — «целая часть снизу», то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. В данном случае для чётного n это $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$; для нечётного n это $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$.