Задачи к семинарам
по курсу «Комбинаторика»
ОП «Клеточная и молекулярная биотехнология»
2021/22 учебный год
Тема 1

Задача 1. Из города A в город B ведут 3 дороги, из города B в город C ведут 4 дороги, из города C в город D ведут 4 дороги. Других дорог нет. Сколькими способами можно проехать из города A в город D?

Задача 2. Есть 10 человек. Сколько есть способов составить из части из них колонну длиной (a) 3; (b) 11; (c) 10 человек?

Задача 3. В автобусе 20 свободных мест. Вошли (a) 5; (b) 25 человек. Сколько есть вариантов рассадить их по свободных местам (каждый вошедший пассажир должен сесть на своё место, стоячих остаться не должно)?

Задача 4. «Словом» будем называть любую конечную последовательность из букв некоторого алфавита.

В некотором языке алфавит состоит из букв «А», «Б», «В», «О», «Ы». Сколько в этом языке

1. слов длины 2, у которых первая буква гласная, а вторая согласная?
2. слов длины 4?
3. слов длины 4, не начинающихся с буквы В?
4. слов длины 4, у которых первая буква не совпадает со второй?
5. слов длины 4, у которых все буквы различны?
6. слов, у которых все буквы различны?
7. слов длины 4, у которых все буквы различны и первая не является буквой «А»?
8. слов, у которых все буквы различны и последняя не является буквой «А»?
9. слов длины 4, содержащих ровно одну букву «Б»?

Задача 5. Сколько способов

1. Рассадить 5 человек по пятиместной карусели?
2. Покрасить пятиместную карусель в два цвета?

Задача 6. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр (возможно, совпадающих; номер может начинаться с нуля). Сколько существует билетов, номер которых не содержит единиц, но содержит хотя бы одну двойку?

Задача 7. В офисе стоит a) 10; b) 7 компьютеров, каждый соединен сетевым проводом с тремя другими. Сколько всего проводов?

Задача 8. Сколькими различными способами можно прочитать слово «строка», двигаясь вправо или вниз?:

С	Т	Р	О	К	А
Т	Р	О	К	А	
Р	О	К	А		
О	К	А			
К	А				
А					

Задача 9. Комбираторными рассуждениями доказать равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \tag{1}$$

Задача 10. Найдите число четырехбуквенных слов над алфавитом $\{a, b, c, d, e\}$.

Задача 11. Найдите число четырехбуквенных слов, содержащих букву «а», над алфавитом $\{a, b, c, d, e\}$.

Задача 12. Найдите число пятибуквенных слов, в которых буквы «a» и «b» стоят рядом и при этом все буквы в слове различны, над алфавитом $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Задача 13. Найдите число десятизначных натуральных чисел, в записи которых используются все цифры и на третьем месте стоит цифр

Задача 14. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды?

Задача 15. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

Задача 16. a) Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых цифры расположены по убыванию? b) А пятизначных? c) А если снять ограничение на число знаков?

Задача 17. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого — 8. (Все книги — разные.) Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Задача 18. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 19. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

Задача 20. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть ровно три единицы?

Задача 21. Вычислить суммы:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$; c) $\displaystyle\sum_{k} \binom{n}{2k}$; d) $\displaystyle\sum_{k} \binom{n}{2k+1}$;

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$; f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n}{k}$; j*) $\displaystyle 4\sum_{k} \binom{n}{4k}$

Задача 22. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове

1. КРОНА?
2. КОРОВА?
3. МАТЕМАТИКА?
4. АББББББББ?
5. ААББББББ?
6. АААБББББ?
7. ААААББББ?
8. АААААБББ?

Задача 23. Найдите коэффициент при x^2y^2z в разложении $(x+y+z)^5$.

Задача 24. Найдите коэффициент при xyz в разложении $(x+y+z+1)^5$.

Задача 25. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Задача 26. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

Задача 27. Доказать, что любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где f_k — число Фибоначчи с еомером k, $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \le 1$, $i = 2, 3, \ldots$

Задача 28. Для всех $n \ge 0$ докажите равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = f_{n+1}.$$

Задача 29. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский, пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Выяснить:

1. сколько человек знают все три языка;
2. сколько человек знают ровно два языка;

3. сколько человек знают только английский язык.

Задача 30. 1. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

2. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.

3. Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

Задача 31. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 32. Сколько полных беспорядков на n символах, т. е. сколько перестановок n предметов обладают свойством: ни один предмет не находится на своем месте?

Задача 33. Пусть U — множество из n ($n \geq 3$) элементов.

1. Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$.
2. Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $|X \triangle Y| = 1$.
3. Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing, |X| \geq 2, |Y| \geq 3$.
4. Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $|X \triangle Y| = 1, |X| \geq 2, |Y| \geq 3$.

Задача 34. Сколькими способами король Артур может рассадить 5 пар враждующих рыцарей за круглым столом так, чтобы ни одна пара враждующих рыцарей не сидела рядом?

Задача 35. Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

Задача 36. Пусть $N(r)$ — количество предметов, обладающих ровно r свойствами, $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами. Докажите равенства

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k.$$

Задачи повышенной сложности

Задача 37. Сколько «слов» (не обязательно осмысленных) длины 7 в русском языке содержит две буквы «н», идущие подряд?

Задача 38. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

Задача 39. Доказать, что любые два соседних члена последовательности Фибоначчи не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

Задача 40. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа?

Задача 41. Сколькими способами из множества первых n натуральных чисел можно выбрать подмножество мощности k так, чтобы в подмножество не входили соседние числа, считая при этом, что числа 1 и n — тоже соседние?

Задача 42. На окружности отмечены $2n$ различных точек. Сколькими способами их можно разбить на n пар, соединив непересекающимися отрезками?