Департамент политической науки, 2020-21 уч. год
Высшая математика
Лекция 2. Элементы финансовой математики, часть 2: кредиты, приведение к сегодняшнему дню и эффективная процентная ставка (12.09.2020)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

1 Кредиты

Задача 1. Пусть Некто взял в банке кредит на сумму \$100000 под 10% годовых. Рассмотрим следующие возможности возвращения кредита:

а) Ежегодно Некто возвращает банку \$10000 долга и набежавшие за этот год проценты.

б) Ежегодно Некто выплачивает банку \$20000, включающие в себя проценты и погашение долга, пока не выплатит весь долг. (Это называется *аннуитетные платежи.*) В последний год, вообще говоря, платёж может быть другим.[1]

Описать структуру платежей за первые годы. Каким способом долг будет выплачен быстрее?

Решение. а) Стандартные выплаты плюс проценты. (Такие платежи называются *дифференцированными.*)

Первый платёж состоит из ежегодных \$10000 и 10% от всей суммы долга:

$10000 + 100000 \cdot \dfrac{10}{100} = 20000$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000, см. табл 1.

Сумма кредита	Погашение тела кредита	Проценты по кредиту	Сумма выплат за год	Тело кредита на начало следующего года
$100'000$	$10'000$	$0.1 \times 100'000 = 10'000$	$10'000 + 10'000 = 20'000$	$100'000 - 10'000 = 90'000$
$90'000$	$10'000$	$0.1 \times 90'000 = 9'000$	$10'000 + 9'000 = 19'000$	$90'000 - 10'000 = 80'000$
$80'000$	$10'000$	$0.1 \times 80'000 = 8'000$	$10'000 + 8'000 = 18'000$	$80'000 - 10'000 = 70'000$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10'000$	$10'000$	$0.1 \times 10'000 = 1000$	$10'000 + 1000 = 11'000$	$10'000 - 10'000 = 0$

Таблица 1: Погашение кредита: дифференцированная схема

Второй платёж состоит из ежегодных \$10000 и 10% от оставшейся суммы долга:

$10000 + 90000 \cdot \dfrac{10}{100} = 19000$

[1] На самом деле, обычно сумма ежегодного платежа при аннуитетной схеме подбирается точно таким образом, чтобы все платежи были равными, но мы для упрощения вычислений разрешим платежу в последний год отличаться. Расчёт аннуитетного платежа мы обсудим в конце лекции.

Сумма кредита	Ежегодная выплата	Проценты по кредиту	Погашение тела кредита	Тело кредита на начало следующего года
$100'000$	$20'000$	$0.1 \times 100'000 = 10'000$	$20'000 - 10'000 = 10'000$	$100'000 - 10'000 = 90'000$
$90'000$	$20'000$	$0.1 \times 90'000 = 9'000$	$20'000 - 9'000 = 11'000$	$100'000 - 11'000 = 79'000$
$79'000$	$20'000$	$0.1 \times 79'000 = 7'900$	$20'000 - 7'900 = 12'100$	$79'000 - 12'100 = 66'900$
$66'900$	$20'000$	$0.1 \times 66'900 = 6'690$	$20'000 - 6'690 = 13'310$	$66'900 - 13'310 = 53'590$
$53'590$	$20'000$	$0.1 \times 53'590 = 5'359$	$20'000 - 5'359 = 14'641$	$53'590 - 14'641 = 38'949$
$38'949$	$20'000$	$0.1 \times 38'949 \approx 3'895$	$20'000 - 3'895 = 16'105$	$38'949 - 16'105 = 22'844$
$22'844$	$20'000$	$0.1 \times 22'844 \approx 2'284$	$20'000 - 2'284 = 17'716$	$22'844 - 17'716 = 5'129$
$5'128$	$5'128 + 0.1 \times 5'128 \approx 5'641$	$0.1 \times 5'128 = 513$	$5'641 - 513 = 5'128$	$5'128 - 5'1280 = 0$

Таблица 2: Погашение кредита: аннуитетная схема

После этой выплаты Некто остался должен банку \$80000

Третья выплата составит:

$10000 + 80000 \cdot \dfrac{10}{100} = 18000$

Выплата долга займёт ровно 10 лет: каждый год долг уменьшается на \$10000

б) Стандартные выплаты, включающие проценты. (Такие платежи называются *аннуитетными.*)

В первый платёж входят 10% от всей суммы кредита, остальная сумма идёт на погашение долга:

$20000 - 100000 \times \dfrac{10}{100} = 10000$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000 (см. табл. 2). Во второй платёж входят 10% от оставшейся суммы кредита, на погашение долга идёт:

$20000 - 90000 \times \dfrac{10}{100} = 11000$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000 − \$11000 = \$79000

В третий платёж входят 10% от оставшейся суммы кредита, на погашение долга идёт:

$20000 - 79000 \times \dfrac{10}{100} = 12\,100$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$79000 − \$12 100 = \$66 900

За последующие годы выплаты будут такими:

4. $20000 = 66\,90 + 13\,310$ Долг: $66\,900 - 13\,310 = 53\,590$

5. $20000 = 53\,59 + 14\,641$ Долг: $53\,590 - 14\,641 = 38\,949$ (дальше мы округляем сумму процентов с точностью до доллара)

6. $20000 = 38\,95 + 16\,105$ Долг: $38\,949 - 16\,105 = 22\,844$

7. $20000 = 22\,84 + 17\,716$ Долг: $22\,844 - 17\,716 = 5128$

8. Оставшиеся 5128

Итак, при первой схеме платежей срок выплаты составит 10 лет, общая сумма выплат будет \$155000 , при второй схеме срок платежей будет меньше, общая сумма выплат составит \$145128. ■

2 Приведение к сегодняшнему дню

Деньги имеют ценность не только абсолютную, но и относительную: 10\$ сейчас и 100 лет назад это совершенно разные вещи. Для того чтобы понять, как соотносятся между собой суммы в разные моменты времени, нам нужно уметь сравнивать деньги, полученные сегодня с деньгами, которые будут, скажем, через год (или которые были год назад).

Пусть процентная ставка в некотором банке для обычного вклада составляет 6% годовых. Пусть у нас есть 1000 рублей сейчас. Это значит, что мы совершенно определённо можем получить через год 1060 рублей. С другой стороны, предположим, мы знаем, что нам заплатят 1000 рублей, но только через год. В каком-то смысле, это то же самое, что мы имеем 1000/1,06 рублей сегодня: обладание именно такой суммой гарантирует нам выплату наших 1000 рублей через год. Мы будем говорить *о стоимости, приведённой к сегодняшнему дню.* Итак, если банк установил процентную ставку $a\%$, то стоимость 1000 рублей, полученных через год, приведённая к сегодняшнему дню составит $1000/\left(1+\frac{a}{100}\right)$ рублей, стоимость 1000 рублей, полученных через два года, приведённая к сегодняшнему дню составит $1000/\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$ рублей, а стоимость 1000 рублей, полученных через n лет, приведённая к сегодняшнему дню составит $1000/\left(1+\frac{a}{100}\right)^n$ рублей.

На практике вместо ставки по вкладу в банке может быть любая ставка: кредита, инфляции, доходности бизнеса, а в общем случае сумма всех этих ставок с весовыми коэффициентами, отвечающими, например, рискам. Такая ставка в общем случае называется ставкой дисконтирования.

Разумеется, можно не только говорить про одну сумму, но и считать *чистую приведённую стоимость*: сумму всех денежных потоков (со знаком), приведённых к сегодняшнему дню.

3 Эффективная процентная ставка

Обсуждая кредит в банке, мы исходим из того, что нам известна процентная ставка кредита. В жизни часто встречаются ситуации, когда процентная ставка неизвестна: люди или организации могут договориться о сложных выплатах в разные сроки, скажем, сам кредит выдаётся не единовременно, а по частям, возвращение долга происходит определёнными суммами через какой-то срок. Как по этим данным сказать, под какие именно проценты выдан кредит? С таким же вопросом сталкиваются люди, берущие кредит в банке, где кроме выплат по кредиту есть дополнительные выплаты — за обслуживание кредита, открытие и поддерживание счета и т. д.

Задача 2. Рассмотрим такую схему кредита. Банк выдаёт заёмщику 5000 долларов, через год снова выдаёт 5000 долларов, через два года заёмщик возвращает 12000 долларов. Под какой процент выдан такой кредит?

Ответ: пусть процентная ставка банка составляет $a\%$. Приведём к сегодняшнему дню все произведённые выплаты. Стоимость \$5000, полученных сразу, составляет \$5000, а стоимость \$5000, полученных через год составит $\$5000/\left(1+\frac{a}{100}\right)$. Стоимость возвращённых \$12000 составит $\$12000/\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$. Чтобы были возвращены все занятые деньги, должно выполняться равенство

$$5000 + \frac{5000}{1+\frac{a}{100}} = \frac{12000}{(1+\frac{a}{100})^2}$$

Мы получили уравнение на неизвестное а. Решения этого уравнения $a_1 = -10\sqrt{265}-150 < 0$ и $a_2 = 10\sqrt{265} - 150 \approx 12,788$. Первый корень отрицательный, второй дает нам ответ к задаче: банк выдал деньги под приблизительно $12,8\%$ годовых.

Определение 1. Эффективной процентной ставкой называется такая процентная ставка, при которой сумма стоимостей всех финансовых потоков, приведённая к сегодняшнему дню, равна нулю.

Почему финансовые потоки приводятся именно к сегодняшнему дню, а не к, скажем, дню последних выплат? Дело в том, что эффективная ставка процента не зависит от того дня, к которому приводятся платежи. Действительно, приведём в примере 2 все платежи к дню последней выплаты. Тогда первые \$5000 получены за два года до этого дня, а значит, на эти деньги можно было дважды получить годовые проценты. Через два года \$5000 превратятся в $5000 \cdot \left(1+\frac{a}{100}\right)^2$. Аналогично, вторая выплата получена за год до дня расчёта, а значит, вторые \$5000 превратятся в $5000 \cdot \left(1+\frac{a}{100}\right)$. \$12000 возвращаются в день расчёта, никаких процентов в этом случае на эти деньги не возвращается. Итак, мы получаем уравнение

$$5000 \cdot \left(1+\frac{a}{100}\right)^2 + 5000 \cdot \left(1+\frac{a}{100}\right) = 12000$$

Если разделить это равенство на $(1+\frac{a}{100})$, мы получим то же уравнение, что и в примере 2.

Обсуждая и сравнивая кредиты, мы используем понятие «эффективная процентная ставка». Аналогичные вопросы встают, когда сравниваются любые финансовые проекты: планируются вложения денег и платежи по ним в разные сроки. В этом случае для сравнения проектов используется IRR — internal rate of return. Это аналогичное понятие, вычисляется так же.

4 Расчёт аннуитетных платежей.

После ведения понятия приведения платежей к сегодняшнему дню, мы можем рассчитать каким должен быть платёж в схеме аннуитетных выплат по кредиту. Напомним, в этом случае все платежи должны быть одинаковыми (включая последний, а не как было в примере в начале лекции). Для расчёта приведём все платежи к дню взятия кредита. Обозначим сумму кредита за T, искомый нами платёж за R, ставку кредита $\alpha\%$ годовых и n — количество лет, на которые мы берём кредит. Для удобства введём обозначение $i = \frac{\alpha}{100}$. Тогда k-й платёж (платёж через k лет после взятия кредита), приведённый к сегодняшнему дню будет составлять $\frac{R}{(1+i)^k}$. С другой стороны, все платежи, приведённые к сегодняшнему дню (вместе со взятым кредитом), должны равняться нулю по ставке кредита, откуда мы получаем уравнение:

$$0 = T - \frac{R}{1+i} - \frac{R}{(1+i)^2} - \cdots - \frac{R}{(1+i)^n} = T - R\sum_{k=1}^{n} \frac{R}{(1+i)^k} = T - R\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}}$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии. После упрощения, мы получаем выражение для платежа R через сумму кредита, ставку и количество лет:

$$R = T\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

5 Полные выплаченные суммы

Несмотря на то, что платежи в разные моменты времени в общем случае обладают разной стоимостью и их необходимо приводить к единому дню, на практике бывает полезно вычислить общую сумму выплат за весь период обслуживания кредита.

Для аннуитетной схемы выплат это очень просто: каждый отчётный период выплачивается один и тот же платёж, так что общая сумма выплат вычисляется как $S = nR$, где n - количество отчётных периодов, а R - аннуитетный платёж, рассчитанный по формуле приведённой выше.

В случае дифференцированных платежей подсчёт суммы всех выплат требует небольших вычислений. Если сумма кредита это T, ставка кредита $\alpha\%$ годовых и n — количество лет, на которые мы берём кредит, то каждым платежом мы гасим T/n от тела кредита и доплачиваем проценты на все, что осталось. Понятно, что в сумму всех выплат будут включаться части выплат, которыми мы гасим тело кредита и поэтому остаётся лишь подсчитать сумму выплаченных процентов. Для удобства введём обозначение $i = \frac{\alpha}{100}$. Проще всего начинать с конца: в последней выплате в счёт процентов мы выплатили $i \times T/n$, в предпоследней выплате $i \times 2T/n$, в третьей с конца выплате $i \times 3T/n$ и т.д. Таким образом, выплаты процентов (если считать с конца) образуют обычную арифметическую прогрессию, сумма которой известна из школы. В итоге общая сумма выплат вычисляется следующим образом:

$$S = T + i \cdot \frac{T}{n} + i \cdot \frac{2T}{n} + \cdots + i \cdot \frac{nT}{n} = T + i \cdot \frac{T}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = T\left(1 + i \cdot \frac{n+1}{2}\right)$$