

Департамент политической науки, 2020-21 уч. год

Высшая математика

Задачи по теории вероятностей, часть 2 (02.12.2020/04.12.2020)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

Для успешного освоения темы «Элементы теории вероятностей» студент должен уметь решать все перечисленные ниже задачи.

Теорема (Теорема сложения вероятностей). *Для любых двух событий A и B вероятность того, что хотя бы одно из событий произойдёт равна сумме вероятностей событий A и B минус вероятность их одновременного выполнения:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Задача 1. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — (выпало не меньше трёх орлов), событие B — (выпала хотя бы одна решка).

- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию B и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cap B$ (оба события A и B выполняются) и найти его вероятность.
- Вычислить вероятность $A \cup B$ (выполняется хотя бы одно из событий A и B) с помощью теоремы сложения.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cup B$ и сверить результат с предыдущим пунктом.

Задача 2. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — (выбрали туза), событие B — (выбрали пиковую карту).

- Найти вероятности событий A и B .
- Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.
- Вычислить вероятность $A \cup B$ с помощью теоремы сложения.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cup B$ и сверить результат с предыдущим пунктом.

Задача 3. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — в первый раз выпало чётное число очков. Событие B — в сумме за два подбрасывания выпало больше 5 очков.

- Найти вероятности событий A и B .
- Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.
- Вычислить вероятность $A \cup B$ с помощью теоремы сложения.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cup B$ и сверить результат с предыдущим пунктом.

Условная вероятность

Определение 1. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии B называется отношение вероятности пересечения $A \cap B$ к вероятности события B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию B :

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}.$$

Задача 4. Монетку подбросили два раза. Событие A — выпадение хотя бы одной решки, событие B — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию $A \cap B$.
- Найдите вероятность события $A \cap B$.
- Найдите вероятность события A при условии B .

Задача 5. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — выпадение в первый раз четвёрки, событие B — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям $A \cap B$.
- Найдите вероятность события $A \cap B$.
- Найдите вероятность события A при условии B .

Задача 6. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвёртый раз, событие B — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию $A \cap B$.
- Найдите вероятность события $A \cap B$.
- Найдите вероятность события A при условии B .

Задача 7. Газета «Комсомольская правда» писала: «новый антитабачный законопроект одобряет большинство наших экономически активных сограждан (66%).<...> Удивительно, но в поддержку запрета высказываются и многие курильщики — среди них этот показатель составил 42% (среди некурящих россиян инициативу Минздрава одобряют 75%)» (<http://www.kp.ru/daily/25964/2903066/>).

Выберем случайного человека среди экономически активных граждан. Пусть событие A — выбранный человек одобряет антитабачный закон, событие B — выбранный человек курит.

- Чему равно $P(A)$?
- Чему равно $P(A|B)$?
- Чему равно $P(A|\bar{B})$?
- Можно ли из приведённого фрагмента вычислить, чему равно $P(B|A)$?

ЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Теорема (Теорема умножения вероятностей). *Вероятность пересечения событий равна произведению условной вероятности на вероятность условия:*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если вероятность того, что оба события произойдут одновременно равна произведению вероятностей событий A и B :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Это определение эквивалентно тому факту, что вероятность каждого событий не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B , а вероятность события B равна вероятности события B при условии A :

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Задача 8. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, то есть выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Все элементарные исходы мы считаем равновероятными. Зависимы ли события A — (выпадение орла в первый раз) и B — (выпадение орла во второй раз)?

Задача 9. Зависимы ли события A и B из задач 4–7?

Задача 10. По итогам выборов в Тилмилитрядии стало известно, что за действующего президента в столице проголосовало 46,95% избирателей, а по всей стране его результат составил 63,6% голосов (от числа проголосовавших). Выберем случайного жителя Тилмилитрядии из числа тех, кто голосовал на выборах. Являются ли независимыми события «этот житель проголосовал за действующего президента» и «этот житель живёт в столице»?

Задача 11. Монетку со смещенным центром тяжести подбросили два раза. Выпадение орла в первый раз и выпадение орла во второй раз будем считать независимыми событиями. При каждом подбрасывании выпадение орла считаем вдвое более вероятным, чем выпадение решки. Найти вероятности всех возможных исходов (PP, PO, OP, OO) в двух бросках.

Задача 12. Монетку подбросили пять раз. Выпадение орла в любой раз и выпадение орла в любой другой раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными. Нас интересует количество выпавших орлов. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, найти вероятность каждого. Как изменится ответ, если взять монетку со смещенным центром тяжести из предыдущей задачи?

Задача 13. Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки).

Задача 14. По данным опроса, 20% населения Тилмилитрямдии поддерживают политика И. И. Честного, 30% поддерживают политика А. А. Умного, причём 10% поддерживает их обоих.

- Сколько процентов населения поддерживает И. И. Честного, но при этом не поддерживает А. А. Умного?
- Сколько процентов населения поддерживает хотя бы одного из указанных двух политиков?
- Выбрали случайного гражданина Тилмилитрямдии. Пусть событие A — он поддерживает И. И. Честного, событие B — он поддерживает А. А. Умного. Чему равно $P(A)$? $P(B)$? $P(A \cap B)$?
- Являются ли события A и B независимыми?
- Чему равно $P(A \cup B)$? Выполняется ли теорема сложения вероятностей?

Задача 15. В парламентских выборах участвует Партия Мира и Труда и несколько других партий. Политологи считают, что шансы Партии Мира и Труда занять больше половины мест в парламенте достаточно велики — порядка 70%. Если ей удастся это сделать, то вероятность принятия закона об уголовной ответственности за уклонение от реализации права гражданина на труд составит 80%. (Если же Партия Мира и Труда займёт меньше половины мест в парламенте, про судьбу этого закона ничего не известно.)

Какова вероятность, что произойдут оба события: Партия Мира и Труда займёт больше половины мест в парламенте и будет принят закон?

Задача 16. Каждый пятый житель поддерживает Партию Мира и Труда. Среди сторонников Партии Мира и Труда каждый третий выступает за введение трёх выходных в неделю и 4-часовой рабочий день.

Выбрали случайного жителя. Пусть событие X — «выбранный житель поддерживает Партию Мира и Труда», событие Y — «выбранный житель выступает за введение трёх выходных в неделю и 4-часовой рабочий день».

- Найти $P(X)$.
- Найти $P(Y|X)$.
- Найти $P(X \cap Y)$.
- Можно ли по данным задачи найти $P(X|Y)$? Если нет, дополнить условие задачи таким образом, чтобы эту условную вероятность можно было найти.

Задача 17. Профессор Фортран опоздает на лекцию, если не сработает будильник или если он попадёт в пробку. Вероятность того, что не сработает будильник, равна $1/100$. Вероятность попадания в пробку равна $1/5$. Образование пробки не зависит от времени выхода из дома. С какой вероятностью профессор не опоздает на занятия?

Задача 18. В некотором государстве проходят выборы в парламент по смешанной системе: часть кандидатов избирается по партийным спискам, а часть по одномандатным округам. Один и тот же кандидат может быть одновременно включен в партийный список и участвовать в выборах как одномандатник. Из 100 кандидатов от оппозиции 60 человек выдвигаются в одномандатных округах, а в партийные списки включено 80 кандидатов.

Выберем случайного кандидата от оппозиции. Пусть событие X — «выбранный кандидат выдвигается в одномандатном округе», событие Y — «выбранный кандидат включен в партийный список».

Являются ли независимыми события X и Y ?

Задача 19. Для принятия решения о выделении финансирования на проект привлечено два эксперта. Один эксперт даст положительное заключение с вероятностью 80%, а другой с вероятностью 40%. Эксперты действуют независимо друг от друга. Финансирование будет выделено, если (а) оба эксперта; (б) хотя бы один из экспертов даст положительное заключение. С какой вероятностью финансирование будет выделено?

Задача 20. Фокусник во время представления утверждает, что среди зрителей есть люди с удивительной способностью к предсказаниям. Чтобы доказать это, он предлагает каждому зрителю предсказать результат пятикратного подбрасывания монетки — записать ответ на бумажку - затем он действительно подбрасывает монетку пять раз и спрашивает, кто угадал. Если никто не угадает, фокусника лишат зарплаты за выступление. С какой вероятностью фокусник лишится зарплаты, если в зале присутствует 50 человек?