

Департамент политической науки, 2020-21 уч. год

Высшая математика

Задачи по теории вероятностей, часть 1 (25.11.2020/27.11.2020)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

Для успешного освоения темы «Элементы теории вероятностей» студент должен уметь решать *все* перечисленные ниже задачи.

Классическое определение вероятности

Задача 1. Игральный кубик бросили один раз. Пространство элементарных исходов – количество выпавших очков. Являются ли событиями в этой системе элементарных исходов такие происшествия:

- (a) выпала шестёрка
- (b) выпало чётное число
- (c) кубик подлетел почти до потолка
- (d) выпало число больше четырёх
- (e) у Маши всегда на этом кубике выпадает два очка
- (f) кубик какой-то кривой
- (g) выпала единичка или шестёрка
- (h) выпало больше двух, но меньше пяти очков.

Задача 2. Игральный кубик бросили один раз. Перечислить элементарные исходы, благоприятные следующим событиям.

- (a) на кубике выпала шестёрка
- (b) на кубике выпало количество очков, меньше двух
- (c) на кубике выпало чётное количество очков
- (d) на кубике выпало больше трёх очков
- (e) на кубике выпало семь очков

Задача 3. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Значит, элементарные исходы в этом испытании такие: Решка-Решка, Решка-Орёл, Орёл-Решка, Орёл-Орёл. Мы будем для краткости обозначать их РР, РО, ОР, ОО. Являются ли событиями в этой системе элементарных исходов такие происшествия:

- (a) выпало два орла
- (b) в первый раз выпал орёл
- (c) выпала хотя бы одна решка
- (d) орёл не выпадал ни разу
- (e) орёл выпадал в большем количестве случаев, чем решка

Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислите элементарные исходы, им благоприятные.

Задача 4. Рассмотрим следующие ситуации:

- (a) Монетку подкидывают 5 раз. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Сколько элементарных исходов в этом испытании?
- (b) А если монетку подкидывают 6 раз?
- (c) Из стандартной колоды игральных карт вытаскивают случайную карту, записывают её масть, и возвращают карту в колоду. Потом колоду перемешивают, еще раз вытаскивают случайную карту и снова записывают её масть. Сколько элементарных исходов в этом испытании?
- (d) А если это происходит не 2 раза, а 5 раз?

Задача 5. Рассмотрим следующее случайное испытание: монетка подкидывается четыре раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.

- (a) В первый раз выпал орёл.
- (b) Во второй раз выпала решка.
- (c) В первый раз выпал орёл, а во второй раз выпала решка.
- (d) В первый раз выпал орёл, а после третьего бросания монетка погнулась.
- (e) Все четыре раза монетка выпала одной и той же стороной.
- (f) В первый раз выпало не то, что в четвёртый, а во второй — не то, что в третий.
- (g) Монетка зависла в воздухе на четвёртое бросание.

Задача 6. В условиях задачи 5 определим события A и B . Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям A , B , $A \cap B$, $A \cup B$:

- (a) A = «Выпала хотя бы одна решка», B = «Выпало ровно пять орлов»
- (b) A = «При первом бросании выпал орёл», B = «При втором бросании выпала решка»
- (c) A = «Выпал хотя бы один орёл», B = «Выпало ровно три решки»
- (d) A = «Выпало меньше двух орлов», B = «Орлов выпало больше, чем решек».

Задача 7. Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие A — в первый раз выпало пять очков, событие B — хотя бы раз выпадало чётное количество очков. Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие

- (a) событию $A \cap B$ (оба события произошли)
- (b) событию $A \cup B$ (произошло хотя бы одно из событий).

Определение 1. Мы будем говорить, что два события *равновероятны*, если нет никаких объективных причин считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Определение 2. Если все элементарные исходы равновероятны, то вероятностью $p(A)$ события A называется отношение количества благоприятных исходов к общему количеству элементарных исходов.

Задача 8. Найти вероятности всех событий, фигурировавших в предыдущих задачах.

Задача 9. Монетку подкинули три раза. Что вероятнее — выпадение трёх орлов, или выпадение орла, затем решки, затем орла?

Задача 10. Рассмотрим эксперимент по той же схеме, что в задаче 5. Перед началом эксперимента Иван Иванович записал на листе бумаги результаты нескольких бросаний, указывая номер бросания и предсказанный исход (например, «Во второе бросание выпадет решка, а в третье бросание — орёл»). Иван Иванович выиграл, если сбылись все предсказания, записанные им на листе. С какой вероятностью Иван Иванович выигрывает, если он предсказал результат:

- (a) только первого бросания;
- (b) только четвёртого бросания;
- (c) первого и третьего бросания;
- (d) второго и четвёртого бросания;
- (e) трёх каких-то бросаний;
- (f) всех четырёх бросаний?

Задача 11. Одновременно бросаются два одинаковых (неразличимых) игральных кубика с шестью гранями. Вычислить вероятности следующих событий:

- (a) На одном кубике выпало 5, а на другом — 6.
- (b) На обоих кубиках выпало 3.
- (c) Сумма выпавших очков равна 1.
- (d) Сумма выпавших очков равна 2.
- (e) Сумма выпавших очков равна 3.
- (f) Сумма выпавших очков больше 3.
- (g) Выпало два чётных числа.

Дополнительные задачи

Эти задачи — несколько сложнее остальных; мы не предполагаем их разбирать на семинарах, но вы можете их сделать самостоятельно и обсудить с преподавателями, если задачи, перечисленные выше, вы уже сделали, и они показались вам слишком простыми.

Задача 12. В урне лежат 5 шаров (неразличимых на ощупь), пронумерованных числами от 1 до 5. Из неё вытаскивают наугад два шара, сначала первый, потом второй. Построить пространство элементарных исходов такого случайного испытания, если

- (a) После вытаскивания первого шара и записи его номера он возвращается в урну.
- (b) После вытаскивания первого шара он не возвращается в урну.

Задача 13. В урне лежат 7 шаров (неразличимых на ощупь), пронумерованных числами от 1 до 7. Из неё вытаскивают наугад три шара, сначала один, потом другой, потом ещё какой-то. Построить пространство элементарных исходов такого случайного испытания, если

- (a) После вытаскивания очередного шара и записи его номера он возвращается в урну.
- (b) После вытаскивания очередного шара он не возвращается в урну.

Задача 14. В урне лежат 3 зелёных и 4 красных шара. Из урны достают один шар, записывают его цвет, возвращают его в урну, потом снова достают один шар и снова записывают его цвет. Какова вероятность, что шар оказался

- (a) оба раза красным;
- (b) оба раза зелёным;
- (c) в первый раз красным, а во второй зелёным;
- (d) в первый раз зелёным, а во второй красным;
- (e) в один раз зелёным, а в другой красным?

Задача 15. В урне лежат 3 зелёных и 4 красных шара. Из урны достают один шар, записывают его цвет, откладывают в сторону (не возвращая в урну), потом достают ещё один шар и снова записывают его цвет. Какова вероятность, что шар оказался

- (a) оба раза красным;
- (b) оба раза зелёным;
- (c) в первый раз красным, а во второй зелёным;
- (d) в первый раз зелёным, а во второй красным;
- (e) в один раз зелёным, а в другой красным?