

Школа лингвистики, 2020-21 уч. год

Теория вероятностей

Классическое определение вероятности, условная вероятность и независимость событий: напоминание (12.01.2021)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

События и элементарные исходы

Задача 1. Рассмотрим следующее случайное испытание: монетку подбрасывают четыре раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.

- (a) В первый раз выпал орёл.
- (b) Во второй раз выпала решка.
- (c) В первый раз выпал орёл, а во второй раз выпала решка.
- (d) В первый раз выпал орёл, а после третьего бросания монетка погнулась.
- (e) Все четыре раза монетка выпала одной и той же стороной.
- (f) В первый раз выпало не то, что в четвёртый, а во второй — не то, что в третий.
- (g) Монетка зависла в воздухе на четвёртое бросание.

Задача 2. В условиях задачи 1 определим события A и B . Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям A , B , $A \cap B$, $A \cup B$:

- (a) A = «Выпала хотя бы одна решка», B = «Выпало ровно пять орлов»
- (b) A = «При первом бросании выпал орёл», B = «При втором бросании выпала решка»
- (c) A = «Выпал хотя бы один орёл», B = «Выпало ровно три решки»
- (d) A = «Выпало меньше двух орлов», B = «Орлов выпало больше, чем решек».

Задача 3. Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие A — в первый раз выпало пять очков, событие B — хотя бы раз выпадало чётное количество очков. Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие

- (a) событию $A \cap B$ (оба события произошли)
- (b) событию $A \cup B$ (произошло хотя бы одно из событий).

Классическое определение вероятности

Определение 1. Мы будем говорить, что два события *равновероятны*, если нет никаких объективных причин считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Определение 2. Если все элементарные исходы равновероятны, то вероятностью $p(A)$ события A называется отношение количества благоприятных исходов к общему количеству элементарных исходов.

Задача 4. Найти вероятности всех событий, фигурировавших в предыдущих задачах.

Комбинаторика и вероятность

Задача 5. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребёнок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.

- Если ребёнок берет 3 карточки, какова вероятность, что получится слово «ТОР»?
- Если ребёнок берет все 6 карточек, какова вероятность, что получится слово «ТЕОРИЯ»?

Задача 6. На столе лежат три карточки с буквой «А», две карточки с буквой «Н» и одна карточка с буквой «С». Какова вероятность, что ребёнок из предыдущей задачи соберёт из них слово «АНАНАС»?

Теорема сложения вероятностей

Задача 7. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — (выпало не меньше трёх орлов), событие B — (выпала хотя бы одна решка).

- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию B и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cap B$ и найти его вероятность.
- Вычислить вероятность события $A \cup B$.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cup B$ и найти его вероятность, сравнить с ответом в предыдущем пункте.

Задача 8. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — (выбрали туза), событие B — (выбрали пиковую карту).

- Найти вероятности событий A и B .
- Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.
- Вычислить вероятность события $A \cup B$.
- Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cup B$? Найти вероятность этого события, сравнить с ответом в предыдущем пункте.
- Зависимы ли события A и B ?

Условная вероятность

Определение 3. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии B называется отношение вероятности пересечения $A \cap B$ к вероятности события B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию B :

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Задача 9. Монетку подбросили два раза. Событие A — выпадение хотя бы одной решки, событие B — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
- Найдите вероятность события $A \cap B$.
- Найдите вероятность события A при условии B .

Задача 10. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвёртый раз, событие B — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
- Найдите вероятность события $A \cap B$.
- Найдите вероятность события A при условии B .

(Не)зависимость событий

Определение 4. События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B , а вероятность события B равна вероятности события B при условии A :

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Это определение можно переписать в симметричной форме:

$$\text{События } A \text{ и } B \text{ независимы если и только если } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Задача 11. Известно, что среди владеющих английским языком знающие испанский встречаются в 2 раза чаще, чем среди людей в целом. Зависимы ли события A — (случайно взятый человек знает английский) и B — (случайно взятый человек знает испанский)?

Задача 12. Из длинного текста, написанного на грамотном русском языке, наугад взята пара слов, идущих подряд в одном предложении. Событие A = «первое из этих слов — „не”», событие B = «второе из этих слов — глагол». Можно ли сразу сказать, являются ли независимыми события A и B ? Как бы вы предложили проверить свою гипотезу?

Задача 13. Монетку подкинули 3 раза. Событие A = «в первый раз выпал орёл», событие B = «орёл выпал два раза».

- Найти вероятность события A .
- Найти вероятность события B .
- Найти вероятность $P(A \cap B)$.
- Перечислить все исходы, благоприятные событию $A \cap B$.
- Проверить, правильно ли вы нашли вероятность $P(A \cap B)$.
- Являются ли события A и B независимыми?

Теорема умножения вероятностей

Задача 14. Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно (и даже нужно!) использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки.