Школа лингвистики, 2020-21 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Предел функции (22.09.2020)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов,Р. Я. Будылин

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Задача 1. Найти следующие пределы.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x-3}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+2x+1}{x-1}$.

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+2x+1}{-x^2+x-3}$;

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-3}{-x^3+2x+1}$;

Задача 2. Построить график функции $y=f(x)$.

(a)
$$f(x)=|x-2|;$$

(b)
$$f(x)=\frac{|x|}{x};$$

(c)
$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases};$$

(d)
$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 0\\ \frac{1-x^2}{1-x}, & x>0\end{cases};$$

Пользуясь построенными графиками, найти пределы $\lim_{x\to0} f(x)$, $\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)$. В пункте 2a найти также $\lim_{x\to2^+} f(x)$, $\lim_{x\to2^-} f(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)$. В пункте 2d, найдите также $\lim_{x\to1^+} f(x)$, $\lim_{x\to1^-} f(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$.

Задача 3. Пользуясь известными правилами для арифметических операций, найти следующие пределы.

(a) $\lim\limits_{x\to-2}(3x^4+2x^2-x+1)$;

(b) $\lim\limits_{x\to4-0}\sqrt{16-x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$;

(e) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$;

(f) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$;

(g) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{1/4+1/x}{4+x}$;

(h) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$;

Задача 4. Найти предел, если он существует. Если не существует, объяснить, почему.

(a) $\lim\limits_{x\to3}(2x+|x-3|)$;

(b) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$;

(c) $\lim\limits_{x\to0,5-0}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$.

Задача 5. Найдите пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \; x\sin\dfrac{1}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Дополнительные задачи

Рассмотрим *геометрическую прогрессию* со знаменателем q, то есть последовательность чисел, у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на q. Если $0 < q < 1$, такая последовательность будет убывать, поскольку каждый следующий член меньше предыдущего (при умножении на число, меньшее 1, числа уменьшаются). Пусть a_n — это n-й член последовательности, $a_1 = c$. Тогда $a_2 = cq$, $a_3 = cq^2$, $a_4 = cq^3$ и т.д. Вообще, $a_n = cq^{n-1}$ (использована степень $(n-1)$, а не n, потому что счёт начался с нуля, первому члену соответствует нулевая степень).

Пусть S_n — сумма первых n членов последовательности, то есть $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Например, $S_1 = a_1 = c$, $S_2 = a_1 + a_2 = c + cq$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = c + cq + cq^2$ и т.д.

Задача 6. Доказать, что $S_n = c\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Указание. Пусть
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c + cq + \ldots + cq^{n-1} \tag{1}$$
Тогда можно рассмотреть число qS_n, домножив правую часть равенства (1) на q. Получим выражение, которое очень похоже на S_n, и отличается только некоторыми слагаемыми. Исходя из этого, можно записать уравнение на S_n и решить его.

Задача 7. Известно, что $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ если $0 < q < 1$. Найти $\lim_{n\to\infty} S_n$, если S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом c и знаменателем q.

Задача 8. Постройте график функции:

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx)$

(b) $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos^{2m}(\pi n! x)\right)\right)$