

**Школа лингвистики, 2020-21 уч. год****Линейная алгебра и математический анализ****Обратная функция. Экспонента. Логарифм (08.09.2020)**

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

*Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.*

**Задача 1.** Попробуйте найти обратную зависимость для функции  $y = c$ , где  $c$  — некоторая фиксированная константа.

**Задача 2.** Найдите область определения и область значения функций:

- (a)  $y = x^2$ ;
- (b)  $y = |x|$ ;
- (c)  $y = |x - 1|$ ;
- (d)  $y = |x| - 1$ ;
- (e)  $y = \frac{1}{x^2}$ ;
- (f)  $y = x^4 + x^2 + 1$ ;
- (g) (\*)  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

Постройте графики и покажите, что для этих функций нет обратных на всей области определения.

**Задача 3.** В предыдущих задачах, выделите области, в которых у функции будет обратная. Чему равна область определения и область значений обратной функции? Как они соотносятся с областью определения и областью значений самой функции?

**Задача 4.** Найдите обратные к следующим функциям:

- (a)  $y = x$ ;
- (b)  $y = 2x + 5$ ;
- (c)  $y = x^2, x \leq 0$ ;
- (d)  $y = \frac{1}{x}$ ;
- (e)  $y = 2^{3x} - 1$ ;
- (f)  $y = (3x + 1)^3$ .

**Задача 5.** Выделить лучи на оси  $Ox$ , на которых у функции  $f(x)$  есть обратная. Для каждого из найденных лучей, найти обратную функцию. Построить соответствующие графики.

- (a)  $f(x) = -x^2$ ;
- (b)  $f(x) = x^2 - 5x + 8$ .

**Определение 1.** Функция  $f(x) = a^x$  называется *показательной* (с основанием  $a$ ). Обратная к ней функция  $f^{-1}(y) = \log_a y$  называется логарифмом (по основанию  $a$ ). Существует такое число  $e$ , что показательная функция с основанием  $e$  обладает следующим важным свойством: её производная совпадает с ней самой:  $(e^x)' = e^x$ . Эта функция называется *экспонентой*. Логарифм по основанию  $e$  называется *натуральным логарифмом*.

**Задача 6.** Построить графики функций.

- (a)  $y = 2^x$  и  $y = \log_2 x$ .
- (b)  $y = 4^x$  и  $y = \log_4 x$ .
- (c)  $y = (1/2)^x$  и  $y = \log_{1/2} x$ .

**Задача 7.** Пользуясь результатами предыдущей задачи, объясните, почему  $\log_{1/a} x = -\log_a x$ .

**Задача 8.** Количество постов в твиттере с популярным мемом удваивается каждые полчаса. Предположим, что начальное количество оригинальных записей с мемом равно 100. Если известно, что количество постов с мемом равно

- (a) 200,
- (b) 400,
- (c) 3200,
- (d) произвольному числу  $M$ ,

чему равно время, прошедшее от начала публикации оригинальных записей?

**Задача 9.** Вася и Маша придумывают секретный язык, в алфавите которого будут всего три буквы. Вася хочет дать уникальные имена на этом языке для каждого из своих 243 солдатиков. Чтобы ни одному солдатiku не было обидно, все имена должны иметь одинаковое количество букв. Какое минимальное количество букв будет в имени каждого солдатика? А если у Васи 244 солдатика?

### Дополнительные задачи

**Задача 10.** Найдите обратную функцию к следующим функциям, выделив все возможные промежутки, где обратная функция существует:

- (a)  $\sin(x)$
- (b)  $\cos(x)$
- (c)  $\operatorname{tg}(x)$
- (d)  $\operatorname{ctg}(x)$

**Задача 11.** Пользуясь определением логарифма как обратной функции к показательной и свойствами показательной функции (свойствами операции возведения в степень), докажите, что следующие равенства

- (a)  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ;
- (b)  $\log_a x^y = y \log_a x$ ;
- (c)  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ;

выполняются при всех  $a, b, x, y$ , при которых левая и правая части имеют смысл.

**Задача 12.** Постройте графики следующих функций:

- (a)  $y = \sin(\arcsin(x))$ ,
- (b)  $y = \arcsin(\sin(x))$ ,
- (c)  $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))$ ,
- (d)  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$ .

**Задача 13.** Всегда ли  $f(f^{-1}(x)) = x$ ? А  $f^{-1}(f(x)) = x$ ? Если нет, укажите, какие возможны варианты.