1 Определения и простейшие свойства основных комбинаторных объектов

С чего начинается комбинаторика? В каком-то смысле она начинается с ответа на вопрос: сколькими способами можно среди n элементов выбрать k элементов? На самом деле это не один вопрос, а четыре — выборка может быть упорядоченной и неупорядоченной, повторный выбор одного и того же элемента может допускаться, а может не допускаться. Упорядоченные выборки называются *размещениями* или *наборами*, а неупорядоченные — *сочетаниями*. Как правило, по умолчанию под выборкой понимается выборка без повторений, а если речь идет о выборке с повторениями, то это оговаривается явным образом.

Итак, пусть есть n-элементное множество, например, $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Дадим ответ на вопрос о числе выборок k элементов из этого множества.

1. Упорядоченные выборки с повторениями (размещения с повторениями).

В этом случае число выборок равно числу k-значных чисел в системе счисления по основанию n, т. е. равно

$$n^k.$$

2. Упорядоченные выборки без повторений (размещения).

Первый элемент можно выбрать n способами, второй элемент — $n-1$ способами, $\ldots$, k-й элемент — $n-k+1$ способами. Таким образом общее число способов выбора равно

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. Неупорядоченные выборки без повторений (сочетания).

Так как одной неупорядоченной выборке k элементов без повторений соответствует $k!$ упорядоченных выборок без повторений, то число сочетаний из n элементов по k элементов, обозначаемое C_n^k, при $n \geq k \geq 0$ равно

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

4. Неупорядоченные выборки с повторениями (сочетания с повторениями).

Между множеством всех сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов и множеством всех двоичных наборов длины $n+k-1$ с k нулями следующим образом можно установить взаимно однозначное соответствие: выборке, в которой k_1 единиц, k_2 двоек, $\ldots$, k_n чисел n, $k_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $k_1 + \ldots + k_n = k$, соответствует набор, в котором сначала расположены k_1 нулей, а затем последовательно для $i = 2, \ldots, n$ расположены наборы, состоящие из единицы и стоящих вслед за ней k_i нулей:

$$\underbrace{0\ldots0}_{k_1}1\underbrace{0\ldots0}_{k_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{k_n}.$$

Таким образом, число искомых выборок равно числу C_{n+k-1}^k сочетаний из $n+k-1$ элементов по k элементов, т. е. числу

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

Свойства сочетаний:

1. Если $k > n$, то $C_n^k = 0$.

2. Для любого целого k, $0 \le k \le n$, справедливо равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3. Функция $f(k) = C_n^k$ целочисленной переменной k возрастает на множестве $\{0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ и убывает на множестве $\{\lceil n/2 \rceil, \ldots, n\}$.

4. Выполняется равенство
$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

5. Для любого ненулевого x и произвольного целого неотрицательного n справедливо равенство (бином Ньютона):
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

6. Верны равенства
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n,$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ 0, & \text{если } n \ge 1, \end{cases},$$
$$\sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t \quad (n \ge 1,\ t \ge 0).$$

Свойства сочетаний с повторениям:

1. Число неотрицательных целочисленных решений уравнения
$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = k$$
равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C_{n+k-1}^k.

2. Число монотонных отображений[1]) из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C_{n+k-1}^k.

$\rhd$ Между множеством из всех C_{n+k-1}^k двоичных наборов длины $n+k-1$ с k единицами и множеством монотонных отображений из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ следующим образом установим взаимно однозначное соответствие. Пусть в наборе длины $n+k-1$ с k единицами число нулей до первой единицы равно r_1, число нулей, расположенных между единицами с номерами $i-1$ и i, $i = 2, \ldots, k$, равно r_i:
$$\underbrace{0\ldots0}_{r_1}1\underbrace{0\ldots0}_{r_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{r_k}10\ldots0.$$

Соответствующее этому набору монотонное отобажение f из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ задается таким образом:
$$f(s) = 1 + \sum_{i=1}^{s} r_i, \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

[1]) Отображение f называется *монотонным*, если для любых a и b из области определения отображения f из неравенства $a \le b$ следует неравенство $f(a) \le f(b)$.

Легко понять, что и по монотонному отображению исходный набор восстанавливается однозначно. $\square$

3. Для любого натурального n при $0 < |x| < 1$ справедливо равенство

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} x^k.$$

$\triangleright$ Установим коэффициент при слагаемом x^k после раскрывания скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$$\underbrace{(1+x+x^2+\ldots)\ldots(1+x+x^2+\ldots)}_{n \text{ раз}}.$$

Если какое-либо выражение в скобках не дает «вклад» в конкретное слагаемое x^k, то считаем, что это выражение не входит в выборку, а если дает вклад x^s, $1 \leq s \leq k$, то — входит с кратностью s. Тогда коэффициент при x^k совпадает с числом сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов. $\square$

Теперь преобразуем выражение из свойства 3 сочетаний с повторениями следующим образом:

$$(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n}{k!} x^k =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} (-x)^k.$$

Таким образом, формулы из свойства 5 сочетаний и из свойства 3 сочетаний с повторениями являются частными случаями известного из курса математического анализа и справедливого для любого действительного α при $0 < |x| < 1$ разложения

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что для всех целых неотрицательных n и k верно равенство

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

2 Формула включений-исключений

Пусть есть N предметов и свойства $p_1, \ldots, p_n$. Каждый предмет может одними свойствами обладать, а другими не обладать. Обозначим через $N_{i_1,\ldots,i_k}$ количество предметов, которые обладают свойствами $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ (обладание остальными свойствами — произвольное).

Через $N(r)$ обозначим число предметов, обладающих ровно r свойствами. Положим

$$S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} N_{i_1, \ldots, i_k} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Здесь особо отметим, что S_k — просто удобные обозначения, способствующие уменьшению громоздкости выкладок, не стоит за ними усматривать какой-то сакраментальный смысл.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$N(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Покажем, что каждый предмет дает одинаковый вклад при подсчете левой и правой частей устанавливаемого равенства.

Пусть предмет не обладает ни одним свойством. Тогда вклад в левую часть будет равен 1, вклад в правую часть будет ненулевым только в слагаемое $S_0 = N$, соответствующее мощности множества всех предметов, и этот вклад тоже равен 1.

Пусть предмет обладает s свойствами, $1 \le s \le n$, и это свойства $p_{j_1}, \ldots, p_{j_s}$. Тогда данный предмет дает ненулевой (единичный) вклад в слагаемое $N_{i_1, \ldots, i_t}$ тогда и только тогда, когда верно включение

$$\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{j_1, \ldots j_s\}.$$

Вклад этого предмета в левую часть равен нулю, а в правую —

$$\sum_{t=1}^{s} (-1)^t C_s^t,$$

т. е. вклад тоже нулевой.

Суммируя по всем предметам доказанные равенства вкладов в левую и правую часть, получаем справедливость исходного равенства. $\square$

Переформулируем формулу включений-исключений в терминах множеств.

Следствие 2. Справедливо равенство

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}|.$$

Задача 3 (задача о беспорядках)**.** Найти точное значение числа подстановок σ симметрической группы S_n, удовлетворяющих условию $\sigma(i) \ne i$ для всех i, $1 \le i \le n$.

Что произойдет, если сумму из правой части формулы включений-исключений оборвать на каком-либо слагаемом? Оказывается, что если последнее выписанное слагаемое положительное (точнее, оно соответствует четному числу свойств), то получается оценка величины $N(0)$ сверху, а в противном случае — снизу.

Теорема 4 (Неравенства Бонферрони). *Для любого* l, $0 \le l \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k \le N(0) \le \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Для каждого из неравенств подобно доказательству формулы включений-исключений достаточно установить соответствующее неравенство для вкладов в левую и правую часть доказываемого соотношения каждого из предметов. Нужное неравенство легко следует из равенства

$$\sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t$$

(третье равенство свойства 6 сочетаний). □

Также аналогично формуле включений-исключений можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 5. *Справедливы равенства*

$$N(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\ge r} = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k,$$

где $N_{\ge r}$ *— количество предметов, обладающих не менее чем* r *свойствами.*

Задача 6. Доказать теорему 5.

Обозначим через $\varphi(m)$ функцию Эйлера, численно равную количеству натуральных чисел, не превосходящих m и взаимнопростых с m.

Теорема 7. *Пусть* $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ *— разложение числа* m *на простые множители. Тогда*

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Доказательство. Применим формулу включений-исключений, положив $N = m$ и считая i-м свойством делимость на p_i, $i = 1, \dots, n$. Тогда имеем:

$$\varphi(m) = N(0) = m - \sum_{1 \le i \le n} \frac{m}{p_i} + \ldots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_k \le n} \frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{m}{p_1 \dots p_n} = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

□

3 Метод производящих функций

Сопоставим последовательности $\{a_n\}$ или бесконечному вектору

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots)$$

формальный степенной ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

который называется *производящей функцией* последовательности $\{a_n\}$.

Иногда для последовательности $\{a_n\}$ также используется понятие *экспоненциальной производящей функции*, которая определяется как такой формальный степенной ряд:

$$A_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

В общих чертах метод производящих функций заключается в переходе от последовательности к производящей функции, ее изучение с дальнейшим использованием свойств производящей функции для получения информации об исходной последовательности. Наиболее типичная ситуация для метода производящих функций такая. Имеется рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет искомая последовательность. По этому соотношению на элементы последовательности находится уравнение, которому удовлетворяет производящая функция последовательности. Решая уравнение (здесь, вообще говоря, должна быть немалая доля везения), находим производящую функцию, а следовательно, так или иначе, находим элементы последовательности.

К использованию метода производящих функций можно условно выделить три подхода.

1. Развитие и использование теории формальных степенных рядов, обобщающих теорию обычных степенных рядов.

2. Переход к функциям, к которым сходятся (абсолютно) в некоторой окрестности нуля формальные степенные ряды; использование возможностей классического анализа.

3. Работа с формальными степенными рядами как с обычными функциями (без уточнения вопросов сходимости и других вопросов корректности) с последующей проверкой ответа.

Отметим, что третий подход, даже если его рассматривать только как способ «угадывания» ответа, зачастую бывает достаточно эффективен. Например, задача нахождения суммы кубов первых n натуральных чисел труднее задачи проверить равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

которое очень легко устанавливается по индукции: база индукции очевидна, а переход следует из соотношения

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = n^3.$$

Вообще, проверить, удовлетворяет ли исходному рекуррентному соотношению вида $a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ найденная последовательность — задача существенно более простая нежели задача найти эту последовательность.

Рассмотрим примеры, когда формальным степеным рядам соответствуют функции, к которым в некоторой окрестности нуля сходятся эти степенные ряды.

1. Если $a_n = \binom{m}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m.$$

2. Если $a_n = \binom{m+n-1}{n}\lambda^n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \lambda^n x^n = (1-\lambda x)^{-m}.$$

Пусть производящая функция $A(x)$ последовательности $\{a_n\}$ абсолютно сходится в некоторой окрестности нуля (к функции, которую естественно также обозначать $A(x)$), а последовательность $\{b_n\}$ тесно связана с последовательностью $\{a_n\}$. Выразим производящую функцию $B(x)$ последовательности $\{b_n\}$ через функцию $A(x)$.

Если

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le n \le k-1; \\ a_{n-k}, & \text{если } n \ge k, \end{cases}$$

то

$$B(x) = x^k A(x).$$

Если

$$b_n = a_{n+k}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

то

$$B(x) = \frac{A(x) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} = \frac{A(x) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{A^{(i)}(0)}{i!} x^i}{x^k}.$$

Если

$$b_n = n a_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

то

$$B(x) = xA'(x).$$

Теперь применим метод производящих функций для решения одной известной задачи.

Определим *правильную скобочную структуру* как последовательность левых и правых скобок, которую можно получить за конечное число применений следующих правил:

— последовательность ( ) являетя правильной скобочной структурой;

— если П — правильная скобочная структура, то (П) — тоже правильная скобочная структура;

— если Π_1 и Π_2 — правильные скобочные структуры, то $\Pi_1\Pi_2$ — тоже правильная скобочная структура.

Задача заключается в нахождении числа правильных скобочных структур, содержащих ровно по n левых и правых скобок. Обозначим это число через a_n.

Очевидно, что в каждом начальном отрезке любой правильной скобочной структуры число левых скобок не менее числа правых скобок. Разобьем множество $\mathcal{A}_{n+1}$ всех правильных скобочных структур, содержащих ровно по $n+1$ левых и правых скобок, на подмножества $\mathcal{A}_{n+1}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}_{n+1}^{(n+1)}$, где $\mathcal{A}_{n+1}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n+1$, — подмножество правильных скобочных структур из множества $\mathcal{A}_{n+1}$, обладающих следующим свойством: впервые равенство числа левых и правых скобок достигается на элементе последовательности скобок с номером $2i$. Тогда справедливы равенства

$$a_{n+1} = |\mathcal{A}_{n+1}| = \left|\mathcal{A}_{n+1}^{(1)}\right| + \ldots + \left|\mathcal{A}_{n+1}^{(n+1)}\right| = a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_1 + a_n.$$

Теперь, полагая $a_0 = 1$, получаем рекуррентную формулу

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Переходя к производящей функции $A(x)$ последовательности $\{a_n\}$, заметим, что для всех n верно неравенство $a_n \leq 4^n$. Поэтому в некоторой окрестности нуля соответствующий этой последовательности степенной ряд абсолютно сходится.

Введем последовательности $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ равенствами

$$b_n = a_{n+1}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Для производящих функций $B(x)$ и $C(x)$ последовательностей $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ справедливы равенства:

$$B(x) = C(x), \quad B(x) = \frac{A(x) - a_0}{x}, \quad C(x) = A^2(x).$$

Следовательно,

$$\frac{A(x) - 1}{x} = A^2(x).$$

Таким образом, имеем квадратное уравнение

$$xA^2(x) - A(x) + 1 = 0$$

относительно $A(x)$. Решая его, получаем:

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Подходит только один корень:

$$A(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Разложим в ряд Маклорена функцию $1-\sqrt{1-4x}$:

$$
\begin{aligned}
1-\sqrt{1-4x} = 1-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-4x)^k &= \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-4x)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)(1-2)(1-4)\dots(1-2(k-1))}{2^k k!}(-4x)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}4^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!!(2k-3)!!}{2^{k-1}(k-1)!2^k k!}4^k x^k = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!}2x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
A(x) = \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n.
$$

Следовательно,

$$
a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n=0,1,\dots
$$

Число $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ называется *n-м числом Каталана.* Числа Каталана возникают во многих комбинаторных задачах, в частности, n-му числу Каталана равны:

а) количество наборов, состоящих из n нулей и n единиц, в которых в любом начальном отрезке число единиц не превосходит числа нулей;

б) количество способов разбиения (путем проведения непересекающихся диагоналей) выпуклого $(n+2)$-угольника на треугольники;

в) количество монотонных отображений f из множества $\{1,2,\dots,n\}$ в множество $\{1,2,\dots,n\}$, удовлетворяющих условию $f(i)\le i$ для всех i, $1\le i\le n$;

г) количество всех $(2\times n)$ матриц, множество элементов которых совпадает со множеством $\{1,2,\dots,2n\}$, причем в каждой строке и в каждом столбце элементы расположены в возрастающем порядке.

Задача 8. Найти экспоненциальную производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, где a_n — количество возрастающе-убывающих подстановок симметрической группы S_n (подстановка $\sigma\in S_n$ возрастающе-убывающая, если в последовательности $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)$ все элементы, стоящие на четных местах, больше своих соседей).

Ответ: $A_e(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}$ (функция $A_e(x)$ удовлетворяет уравнению $2A_e'(x)-A_e^2(x)-1=0$).

4 Линейные рекуррентные последовательности

Рассмотрим следующую задачу. Нужно найти число f_n наборов из нулей и единиц длины n, обладающие свойствами:

1) первый разряд набора равен единице;
2) последний разряд набора равен единице;
3) в наборе нет двух стоящих рядом нулей.

Последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $f_{n+2} = f_{n+1}+f_n$ и начальным условиям $f_1 = f_2 = 1$. Такая последовательность называется *последовательностью Фибоначчи* (в исходной задаче специально добавлены первые два условия, чтобы получилось именно эта последовательность, а не «сдвинутая»). Последовательность Фибоначчи возникает очень часто в самых разных областях математики. В частности, f_n равно количеству таких подстановок σ симметрической группы S_{n-1}, что для любого i, $1 \leq i \leq n-1$, выполняются неравенства $|i - \sigma(i)| \leq 1$.

Последовательность Фибоначчи является частным случаем возвратных последовательностей, задаваемых линейными однородными соотношеними с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение такого соотношения.

Теорема 9. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ с элементами из $\mathbb{C}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$a_{n+k} = u_1 a_{n+k-1} + \ldots + u_{k-1} a_{n+1} + u_k a_n,$$

где $u_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, k$, $u_k \neq 0$. Тогда

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^n P_i(n), \tag{$*$}$$

где λ_i — корень кратности r_i характеристического многочлена

$$x^k - u_1 x^{k-1} - \ldots - u_{k-1} x - u_k,$$

$P_i(n)$ — многочлен от переменной n степени $r_i - 1$, $i = 1, \ldots, s$. Коэффициенты многочленов P_i в количестве $r_1 + \ldots + r_s = k$ штук определяются из справедливости формулы $(*)$, например, для первых k членов последовательности.

Доказательство. Найдется такая константа c, что для любого n, $n \geq 1$, справедливо неравенство

$$|a_{n+1}| \leq c \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Поэтому рост элементов последовательности по абсолютной величине не более чем степенной. Следовательно, переходя от последовательности $\{a_n\}$ к производящей функции $A(x)$ этой последовательности, получаем степенной ряд, абсолютно сходящийся в некоторой окрестности нуля.

Производящая функция $B(x)$ последовательности $\{b_n\}$, задаваемой при всех n равенством $b_{n+i} = a_n$, имеет такой вид:

$$B(x) = x^{-i}(A(x) - Q_{i-1}(x)),$$

где $Q_{i-1}(x)$ — многочлен степени $i-1$, определяемый первыми i членами последовательности $\{a_n\}$.

Поэтому исходное рекуррентное соотношение дает следующее уравнение относительно производящей функции $A(x)$:

$$x^{-k}(A(x)-Q_{k-1}(x))=\sum_{i=1}^{k-1}u_ix^{-(k-i)}(A(x)-Q_{k-i-1}(x))+u_kA(x).$$

Домножим левую и правую часть этого равенства на x^k и соберем слагаемые, содержащие функцию $A(x)$ в левой части равенства:

$$A(x)\left(1-\sum_{i=1}^{k}u_ix^i\right)=\tilde{Q}_{k-1}(x),$$

где $\tilde{Q}_{k-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $k-1$.

Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ — корни характеристического многочлена

$$x^k-u_1x^{k-1}-\ldots-u_{k-1}x-u_k,$$

кратности $r_1,\ldots,r_s$, соответственно. Так как $u_k\neq 0$, то $\lambda_i\neq 0$, $i=1,\ldots,s$. Тогда, делая замену $x\to\frac{1}{y}$, получаем, что многочлен

$$1-u_1x-\ldots-u_{k-1}x^{k-1}-u_kx^k$$

имеет корни $\frac{1}{\lambda_1},\ldots,\frac{1}{\lambda_s}$ кратности $r_1,\ldots,r_s$, соответственно. Следовательно,

$$A(x)=\frac{\tilde{Q}_{k-1}(x)}{(-u_k)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}\right)^{r_1}\ldots\left(x-\frac{1}{\lambda_s}\right)^{r_s}}=\frac{(-\lambda_1)^{r_1}\ldots(-\lambda_s)^{r_s}\tilde{Q}_{k-1}(x)}{(-u_k)(1-\lambda_1x)^{r_1}\ldots(1-\lambda_sx)^{r_s}}.$$

Используя разложение рациональной функции в сумму простейших дробей, получаем:

$$A(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\alpha_{ij}}{(1-\lambda_ix)^j},$$

где α_{ij}, $i=1,\ldots,s$, $j=1,\ldots,r_i$, — некоторые константы (вообще говоря, комплексные). Далее, для $i=1,\ldots,s$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\alpha_{ij}}{(1-\lambda_ix)^j}=\sum_{j=1}^{r_i}\alpha_{ij}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\lambda_i^nx^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_i^nx^n\sum_{j=1}^{r_i}\alpha_{ij}\binom{n+j-1}{j-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_i^nP_i(n)x^n,$$

где $P_i(n)$ — некоторый многочлен от переменной n степени r_i-1.

Таким образом,

$$A(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_i^nP_i(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^nP_i(n)\right)x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях переменной x, получаем утверждение теоремы. □

Замечание 1. *Линейное неоднородное соотношение с постоянными коэффициентами вида*

$$a_{n+k} - u_1 a_{n+k-1} - \ldots - u_{k-1} a_{n+1} - u_k a_n = f(n),$$

в случае, когда функция $f(n)$ является квазимногочленом (т. е. $f(n) = \lambda^n P(n)$, где $P(n)$ — многочлен от переменной n), решается методом производящих функций практически так же, как и однородное.

Возвращаясь к последовательности Фибоначчи $\{f_n\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальным условиям $f_1 = f_2 = 1$ (или, что то же самое, начальным условиям $f_0 = 0$, $f_1 = 1$), отметим, что характеристический многочлен $x^2 - x - 1 = 0$ последовательности Фибоначчи имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому, в силу доказанной теоремы, общим решением соотношения $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ будет такая совокупность последовательностей:

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Из начальных условий находим, что $c_1 = 1/\sqrt{5}$, $c_2 = -1/\sqrt{5}$. Таким образом,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

<u>Свойства последовательности Фибоначчи:</u>

1. Пусть φ — «золотое сечение», т. е. $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Тогда для n-го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:

а) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$ (формула Бине);

б) $f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil$.

2. Элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

б) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

в) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

г) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

д) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;

е) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1} = f_{n+1} f_{m+1} - f_{n-1} f_{m-1}$;

ж) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

3. Любые два соседних члена последовательности Фибоначчи взаимнопросты. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

4. Любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq 1$, $i = 2, 3, \ldots$

5. Для производящей функции $F(x)$ последовательности Фибоначчи справедливо равенство

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

(так как степенной ряд абсолютно сходится в некоторой окрестности нуля, то под производящей функцией можно понимать функцию, к которой сходится соответствующий степенной ряд).

Задача 10. Доказать свойства последовательности Фибоначчи.