Департамент политологии, 2018-19 уч. год
Математика и статистика, часть 1.
Лекция 4. Преобразования графиков (24.09.2018)

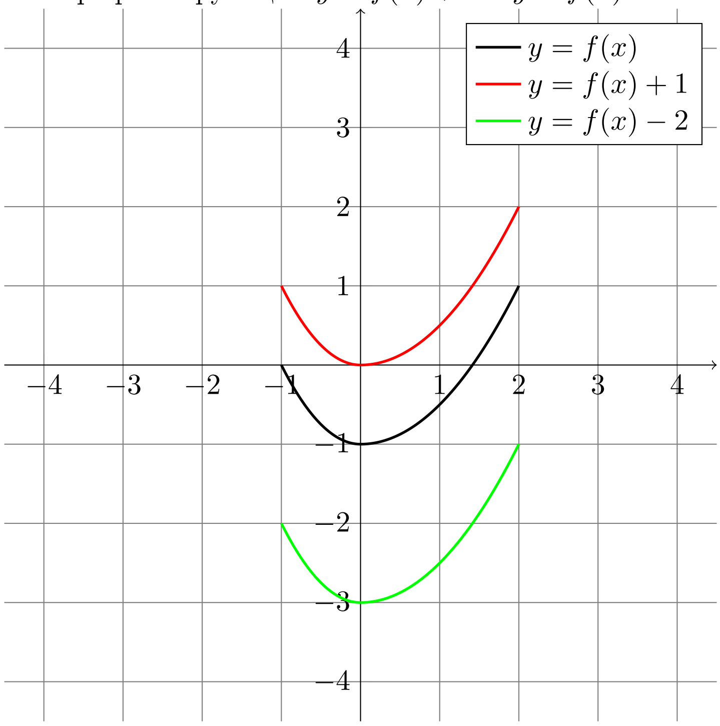
И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

Часто бывает так, что необходимо построить график (не обязательно функции, заданной уравнением, это может быть просто график построенный по данным) не в исходном виде, а преобразованный линейными заменами функции и аргумента. Оказывается, что такое построение легко описывается в геометрических терминах. Во всех случаях предполагается, что график функции $y = f(x)$ известен (на рисунках всегда изображается чёрным цветом).

1 Преобразования функции

Определение 1. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy вверх, если $a > 0$ и вниз если $a < 0$.

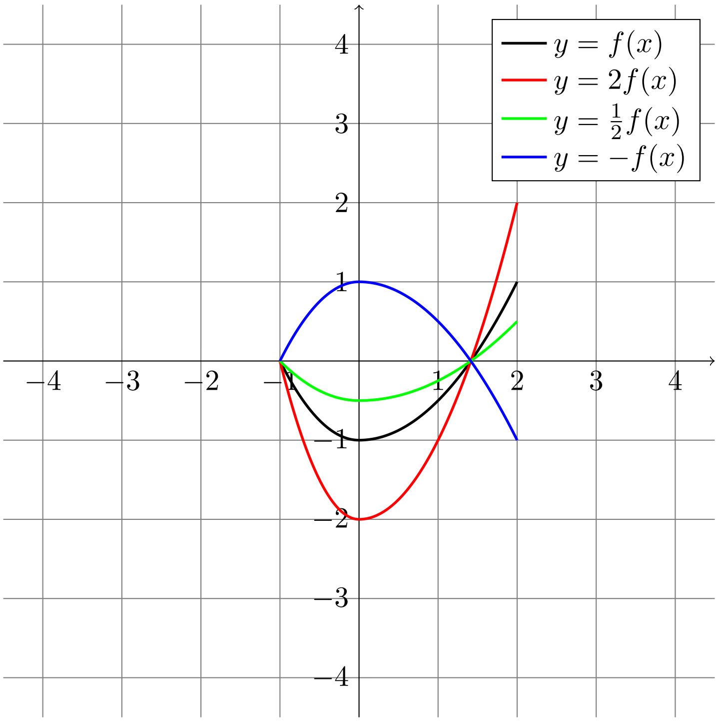
Пример 1. Построим графики функций $y = f(x) + 1$ и $y = f(x) - 2$.



Определение 2. График функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Oy от оси Ox, если $a > 1$ и сжатием вдоль оси Oy к оси Ox, если $0 < a < 1$.

Определение 3. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox.

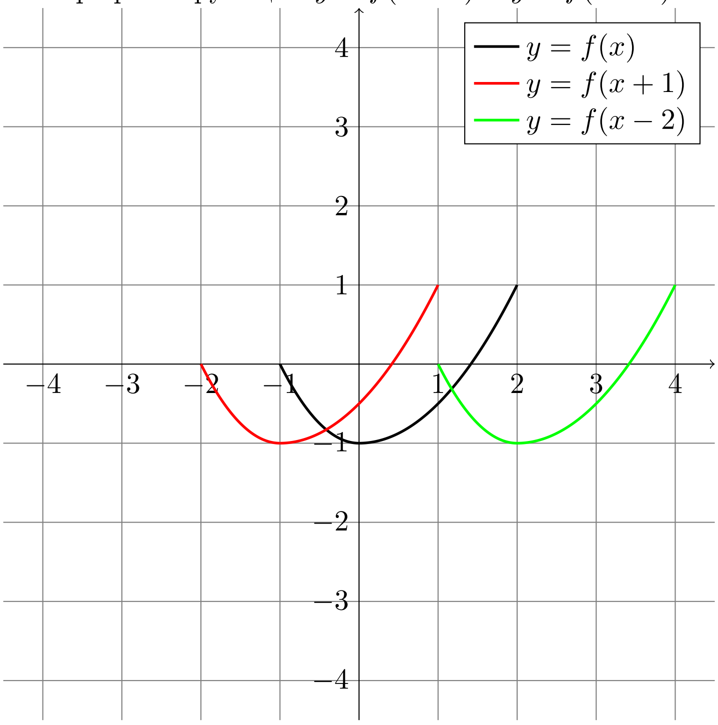
Пример 2. Построим графики функций $y = 2f(x)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$ и $y = -f(x)$.



2 Преобразования аргумента

Определение 4. График функции $y = f(x+a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox влево, если $a > 0$ и вправо если $a < 0$.

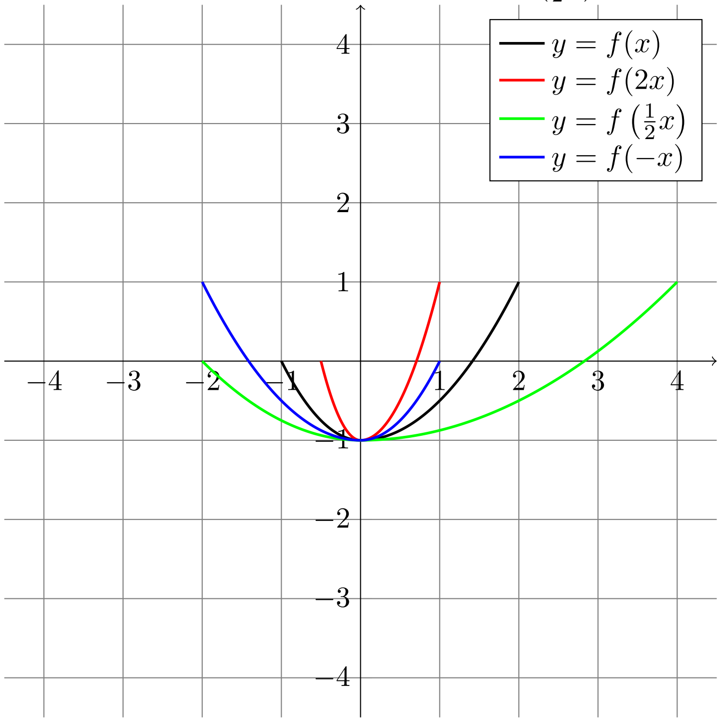
Пример 3. Построим графики функций $y = f(x+1)$ и $y = f(x-2)$.



Определение 5. График функции $y = f(ax)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием вдоль оси Ox к оси Oy, если $a > 1$ и растяжением вдоль оси Ox от оси Oy, если $0 < a < 1$.

Определение 6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy.

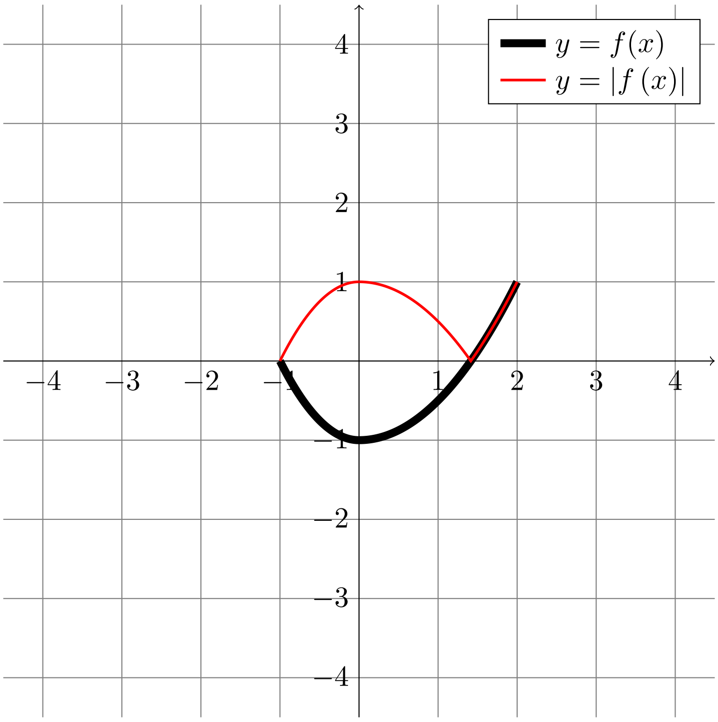
Пример 4. Построим графики функций $y = f(2x)$, $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ и $y = f(-x)$.



3 Работа с модулем

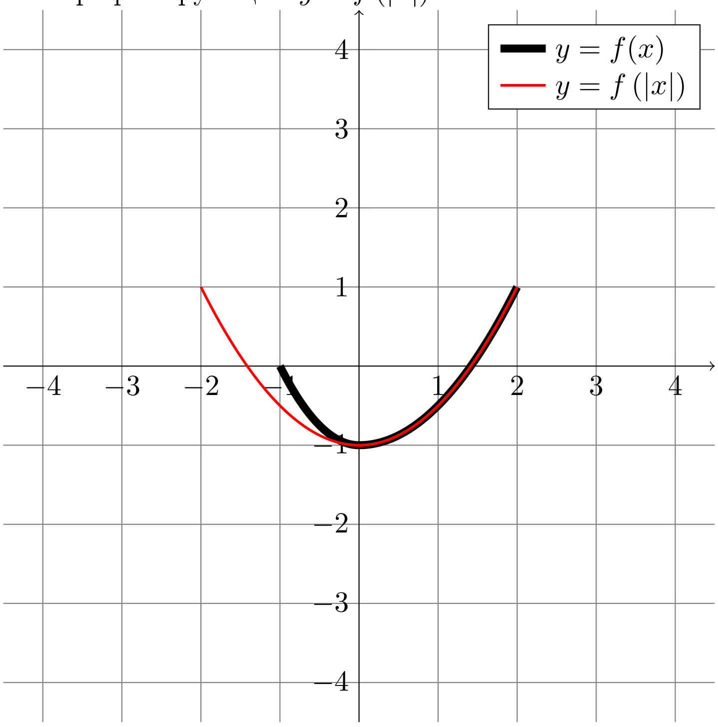
Определение 7. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox той части графика функции $y = f(x)$, которая лежит ниже оси Ox. Часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит выше оси Ox сохраняется.

Пример 5. Построим график функции $y = |f(x)|$.



Определение 8. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ копированием симметрично относительно оси Oy той части графика функции $y = f(x)$, которая лежит правее оси Oy. Часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит правее оси Oy сохраняется. Часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит левее оси Oy не сохраняется.

Пример 6. Построим график функции $y = f(|x|)$.



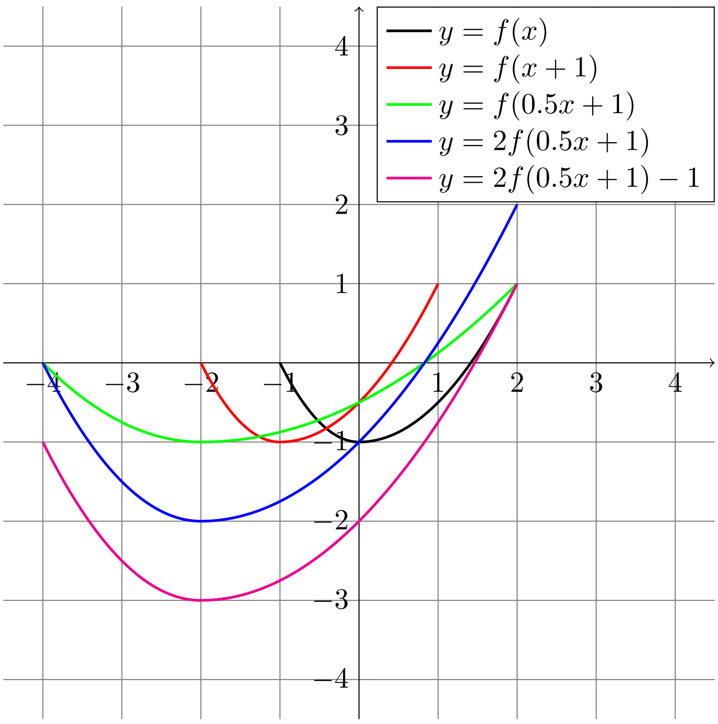
4 Порядок действий

Когда имеется сразу несколько действий, достаточно руководствоваться следующими правилами:

1. Отдельно все действия с функцией и отдельно все действия с аргументом можно производить в любом порядке: можно сначала проделать все действия с функцией, а потом все действия с аргументом, а можно наоборот.
2. Действия с функцией необходимо производить в *прямом* арифметическом порядке.
3. Действия с аргументом необходимо производить в *обратном* арифметическом порядке.

Пример 7. Построим график функции $y = 2f(0.5x + 1) - 1$. Порядок построения будет следующим (для примера для начала будем производить все изменения, которые касаются аргумента, а затем изменения, касающиеся самой функции):

1. $y = f(x)$
2. $y = f(x + 1)$
3. $y = f(0.5x + 1)$
4. $y = 2f(0.5x + 1)$
5. $y = 2f(0.5x + 1) - 1$



5 Обратная функция

Пусть дана некоторая зависимость между двумя величинами: y и x. Например, x — радиус шара, а y — его объём. Или x — год, а y — население некоторой страны в этот год. Мы будем обозначать эту зависимость следующей записью $y = f(x)$. Другими словами, зная значение величины x мы можем однозначно найти значение величины y, задав некоторое правило. Зачастую такое правило выражается в виде некоторой формулы. Со многими такими правилами мы хорошо знакомы, например : $y = 2^x + 1$, $y = x$, $y = x^{2+7x} - \frac{1}{27}$.

Часто бывает так, что мы знаем значение функции (т.е. число y), и нам нужно найти её аргумент (т.е. число x). нас интересует, в каком году население России составляло 100 миллионов человек. Иными словами, зная зависимость y от x, нам нужно найти *обратную зависимость* x от y, то есть такое выражение $g(y)$, что $g(y) = x$. Но поскольку мы знаем, что $y = f(x)$, то получается что $g(f(x)) = x$.

Если зависимость $y = f(x)$ задана некоторой формулой (некоторым выражением), задача нахождения обратной зависимости сводится к поиску выражения g, такого что $g(f(x)) = x$. Разумеется найти такую обратную зависимость не всегда возможно. Дело в том, что искомое выражение g, должно каждому значению y сопоставлять **единственное** значение x.

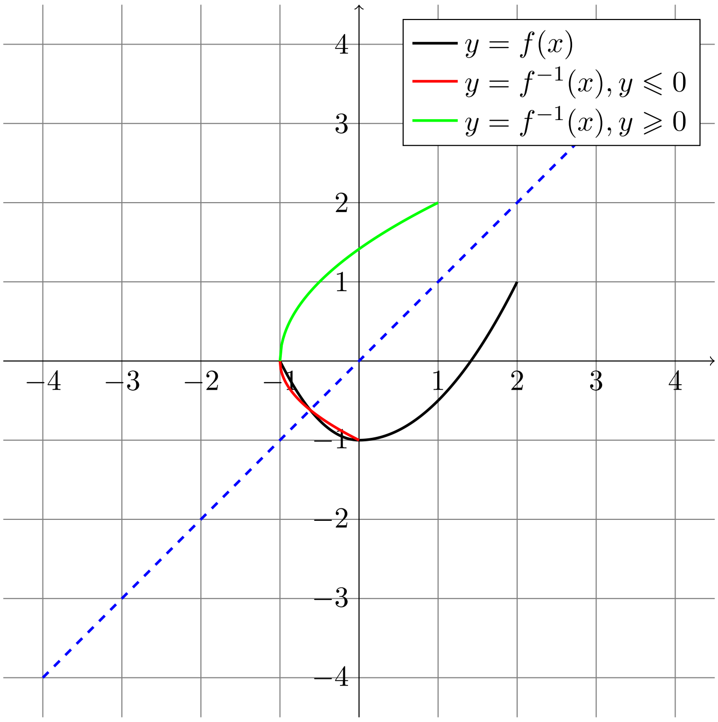
Как мы можем видеть, очень многие знакомые нам функции не обладают обратными. Проблема заключается в том, что на всей области определения функция может «склеивать точки», то есть разным значением x сопоставлять одинаковое значение y. Эта ситуация очень показательна на примере функции $y = x^2$: при $x = 1$ и $x = -1$ мы получаем одно и тоже значение y. Как в таких случаях поступать? Первый очевидный ответ — ограничивать область определения функции. Давайте вспомним определение (арифметического) квадратного корня из числа a: квадратным корнем из *неотрицательного* числа a, называется такое *неотрицательное* число b, что $b^2 = a$. Зачем же требовать неотрицательность чисел a, b? Правильно, чтобы получить *взаимную однозначность*. Мы ограничили функцию $y = x^2$ на полуось $x \geq 0$ и потеряли половину информации о функции, зато получили обратную функцию $y = \sqrt{x}$.

Для обратной функции есть специальное обозначение: $f^{-1}(x)$. Обратите внимание, что степень ставится у самого символа функции и поэтому указанное обозначение не считается обычной арифметической степенью. Если нам нужно в выражении написать число, обратное к *значению* функции, это записывается как $(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$.

Если мы захотим построить обратную функцию про графику известной функции $y = f(x)$ то, поскольку мы будем производить построение на одной и той же координатной плоскости, нам придется поменять местами переменные. Из исходного уравнения мы (если обратная функция к $f(x)$ существует) можем записать $x = f^{-1}(y)$. Однако последнее уравнение описывает в точности тот же график, что и исходное $y = f(x)$. Для того, чтобы построить график функции $y = f^{-1}(x)$ нужно поменять местами переменные x и y, что соответствует смене осей координат. Это рассуждение приводит к следующему правилу:

Определение 9. График функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно прямой $y = x$. Если полученный график не является графиком функции, необходимо у исходной функции выделить промежутки, где каждое значение принимается ровно один раз.

Пример 8. Построим график функции$y = f^{-1}(x)$.


$y = f(x)$
$y = f^{-1}(x), y \leqslant 0$
$y = f^{-1}(x), y \geqslant 0$
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4