

Департамент политологии, 2018-19 уч. год

Математика и статистика, часть 1.

Обратная функция. Логарифм (8.10.2018/9.10.2018)

И. А. Хованская, Н. А. Сопрунова, Я. Н. Шитов, И. В. Щуров, К. И. Сонин (РЭШ),  
Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6e.

**Задача 1.** Попробуйте найти обратную зависимость для функции  $y = c$ , где  $c$  — некоторая фиксированная константа.

**Задача 2.** Найдите область определения и область значения функций:

- (a)  $y = x^2$ ;
- (b)  $y = |x|$ ;
- (c)  $y = |x - 1|$ ;
- (d)  $y = |x| - 1$ ;
- (e)  $y = \frac{1}{|x|}$ ;
- (f)  $y = \sqrt{4|x| - 1}$ .

Постройте графики и покажите, что для этих функций нет обратных на всей области определения.

**Задача 3.** В предыдущих задачах, выделите области, в которых у функции будет обратная.

**Задача 4.** Найдите обратные к следующим функциям:

- (a)  $y = x$ ;
- (b)  $y = 2x + 5$ ;
- (c)  $y = x^2, x \leq 0$ ;
- (d)  $y = \frac{1}{x}$ ;
- (e)  $y = 2^{3x} - 1$ ;
- (f)  $y = (3x + 1)^3$ .

**Задача 5.** Выделить лучи на оси  $Ox$ , на которых у функции  $f(x)$  есть обратная. Для каждого из найденных лучей, найти обратную функцию. Построить соответствующие графики.

- (a)  $f(x) = -x^2$ ;
- (b)  $f(x) = x^2 - 5x + 8$ .

**Задача 6.** Длина окружности, площадь круга, объём шара — это функции от их радиусов. Найдите их обратные.

**Задача 7.** Известно, что за время  $t$ , цена акций увеличивается по закону  $f(t) = 2^{2t} + 1$ . То есть, в начале отсчёта при  $t = 0$ , одна акция стоила 2 рубля, через день стоимость была уже 5 рублей, ещё через день уже 17 рублей и так далее. Постройте график зависимости цены акций от времени. Найдите обратную зависимость. Постройте график.

**Задача 8.** Бактерии удваивают свое количество каждые полчаса. Предположим, что начальное количество бактерий равно 100. Если известно, что количество бактерий равно

- (a) 200,
- (b) 400,
- (c) 3200,

(d) произвольному числу  $M$ ,  
чему равно время, прошедшее от начала?

**Задача 9.** Вы положили 100 рублей на счёт под 20% годовых (сложные проценты). Через сколько лет на вашем счёте будет

- (a) 100 рублей?
- (b) 120 рублей?
- (c) 144 рубля?
- (d) 207 рублей 36 копеек?
- (e)  $x$  рублей?

### Дополнительные задачи

**Задача 10.** Пользуясь определением логарифма как обратной функции к показательной и свойствами показательной функции (свойствами операции возведения в степень), докажите, что следующие равенства

- (a)  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ;
- (b)  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ;

выполняются при всех  $a, b, x, y$ , при которых левая и правая части имеют смысл.

**Определение 1.** Точки  $A$  и  $B$  называются симметричными относительно прямой  $l$ , если отрезок, концами которого являются эти точки, пересекает прямую  $l$  под прямым углом, в точке  $C$ , которая делит его пополам (то есть  $AC = BC$ ).

**Задача 11.** Доказать, что точки  $(x, y)$  и  $(y, x)$  являются симметричными относительно прямой  $y = x$ .