

Школа лингвистики, 2018-19 уч. год

Теория вероятностей

Классическое определение вероятности, условная вероятность и независимость событий: напоминание (15.01.2019)

И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

## События и элементарные исходы

**Задача 1.** Рассмотрим следующее случайное испытание: монетку подбрасывают четыре раза. Нас интересует, какой стороной вверх она падала: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Какой будет система элементарных исходов? Какие из следующих происшествий являются событиями в этой системе исходов? Для тех происшествий, которые являются событиями, перечислить, какие элементарные исходы им благоприятствуют.

- (a) В первый раз выпал орел.
- (b) Во второй раз выпала решка.
- (c) В первый раз выпал орел, а во второй раз выпала решка.
- (d) В первый раз выпал орел, а после третьего бросания монетка погнулась.
- (e) Все четыре раза монетка выпала одной и той же стороной.
- (f) В первый раз выпало не то, что в четвертый, а во второй — не то, что в третий.
- (g) Монетка зависла в воздухе на четвёртое бросание.

**Задача 2.** В условиях задачи 1 определим события  $A$  и  $B$ . Перечислить элементарные исходы, благоприятствующие событиям  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ :

- (a)  $A$  = «Выпала хотя бы одна решка»,  $B$  = «Выпало ровно пять орлов»
- (b)  $A$  = «При первом бросании выпал орел»,  $B$  = «При втором бросании выпала решка»
- (c)  $A$  = «Выпал хотя бы один орел»,  $B$  = «Выпало ровно три решки»
- (d)  $A$  = «Выпало меньше двух орлов»,  $B$  = «Орлов выпало больше, чем решек».

**Задача 3.** Стандартный игральный кубик подкинули два раза. Нас интересует, сколько очков выпадало на кубике, интересна и последовательность выпадений, т.е. выпадение сначала шестёрки, потом единички мы отличаем от выпадения сначала единички, а потом шестёрки. Пусть событие  $A$  — в первый раз выпало пять очков, событие  $B$  — хотя бы раз выпадало чётное количество очков. Опишите элементарные исходы, удовлетворяющие

- (a) событию  $AB$  (оба события произошли)
- (b) событию  $A + B$  (произошло хотя бы одно из событий).

## Классическое определение вероятности

**Определение 1.** Мы будем говорить, что два события *равновероятны*, если нет никаких объективных причин считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

**Определение 2.** Если все элементарные исходы равновероятны, то вероятностью  $p(A)$  события  $A$  называется отношение количества благоприятных исходов к общему количеству элементарных исходов.

**Задача 4.** Найти вероятности всех событий, фигурировавших в предыдущих задачах.

## Комбинаторика и вероятность

**Задача 5.** Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребёнок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой.

- Если ребёнок берет 3 карточки, какова вероятность, что получится слово «ТОР»?
- Если ребёнок берет все 6 карточек, какова вероятность, что получится слово «ТЕОРИЯ»?

**Задача 6.** На столе лежат три карточки с буквой «А», две карточки с буквой «Н» и одна карточка с буквой «С». Какова вероятность, что ребёнок из предыдущей задачи соберет из них слово «АНАНАС»?

## Условная вероятность

**Определение 3.** Условной вероятностью  $P(A|B)$  события  $A$  при условии  $B$  называется отношение вероятности пересечения  $A \cap B$  к вероятности события  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

**Задача 7.** Монетку подбросили два раза. Событие  $A$  — выпадение хотя бы одной решки, событие  $B$  — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- Найдите вероятность события  $AB$ .
- Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Задача 8.** Монетку подбросили четыре раза. Событие  $A$  — выпадение орла в четвёртый раз, событие  $B$  — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- Найдите вероятность события  $AB$ .
- Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

## (Не)зависимость событий

**Определение 4.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события  $A$  равна вероятности события  $A$  при условии  $B$ , а вероятность события  $B$  равна вероятности события  $B$  при условии  $A$ :

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

**Задача 9.** Из длинного текста, написанного на грамотном русском языке, наугад взята пара слов, идущих подряд в одном предложении. Событие  $A$  = «первое из этих слов — „не”», событие  $B$  = «второе из этих слов — глагол». Являются ли независимыми события  $A$  и  $B$ ?

**Задача 10.** Известно, что среди математиков шизофреники встречаются в 10 раз чаще, чем среди людей в целом. Зависимы ли события  $A$  — (случайно взятый человек оказался математиком) и  $B$  — (случайно взятый человек оказался шизофреником)?

**Задача 11.** Монетку подкинули 3 раза. Событие  $A$  = «в первый раз выпал орёл», событие  $B$  = «орёл выпал два раза».

- Найти вероятность события  $A$ .
- Найти вероятность события  $B$ .
- Найти вероятность  $P(AB)$ .
- Перечислить все исходы, благоприятные событию  $AB$ .
- Проверить, правильно ли вы нашли вероятность  $P(AB)$ .
- Являются ли события  $A$  и  $B$  независимыми?

## Теорема сложения вероятностей

**Задача 12.** Монетку подбросили четыре раза. Событие  $A$  — (выпало не меньше трёх орлов), событие  $B$  — (выпала хотя бы одна решка).

- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $A$  и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $A$  и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $A + B$  (выполняется хотя бы одно из событий  $A$  и  $B$ ) и найти его вероятность.
- Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $AB$  (оба события  $A$  и  $B$  выполняются) и найти его вероятность.
- Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

**Задача 13.** В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие  $A$  — (выбрали туза), событие  $B$  — (выбрали пиковую карту).

- Найти вероятности событий  $A$  и  $B$ .
- Какие элементарные исходы благоприятны событию  $AB$ ? Найти вероятность этого события.
- Какие элементарные исходы благоприятны событию  $A + B$ ? Найти вероятность этого события.
- Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.
- Зависимы ли события  $A$  и  $B$ ?

## Теорема умножения вероятностей

**Задача 14.** Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки).