

Школа лингвистики, 2018-19 уч. год**Дискретная математика для лингвистов****Девятнадцатый семинар (17 ноября 2018 года)***В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская*

Задача 1. Доказать, что в любом простом графе, содержащем по крайней мере две вершины, найдутся две вершины с одинаковой степенью.

Задача 2. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин некоторого графа G . Определим на множестве V двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром. Определим на множестве V двуместный предикат $R(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y совпадают.

I. Используя предикаты $P(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде рассматривается неориентированный граф, в пунктах (а) – (с) допускаются петли и кратные рёбра, в пунктах (d) – (i) граф является простым).

- x и y — смежные вершины.
- Существует путь длины 2 между вершинами x и y .
- Граф G не содержит изолированных вершин.
- Степень вершины x равна 3.
- Граф G содержит ровно одну вершину степени 1.
- Расстояние между вершинами x и y равно 2 (расстояние — минимальное число рёбер в пути, у которого x является началом, а y — концом)
- Граф G является полным.
- Существует цикл, содержащий вершины x и y .
- Вершины x и y соединены с одними и теми же вершинами.

II. Пусть E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V . Сколько элементов содержит множество E ?

III. Определим предикат $Q(x, y)$, в котором первый аргумент принадлежит множеству V , а второй — множеству E и который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершина x инцидентна ребру y . Используя предикат $Q(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, выразите предикат $P(x, y)$.

IV. Используя предикаты $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее:

- Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является путём.
- Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является цепью.
- Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является простой цепью.
- Последовательность $v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, e_{i_3}, v_{i_3}$ является циклом.
- Граф G не содержит циклов длины 3. Сделать так, чтобы в выражении отрицания применялись только к предикатам P и Q .
- Граф G не содержит циклов.

Задача 3. Построить пятимерный булев куб.

Задача 4. Доказать, что дерево — двудольный граф.

Задача 5. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ — множество вершин. Сколько существует различных графов на этих вершинах?

Задача 6. Рассмотрим полный граф с 4 вершинами, каждое ребро которого окрашивается в красный цвет с вероятностью $1/5$ и окрашивается в синий цвет с вероятностью $4/5$.

1. Какая вероятность того, что весь граф будет окрашен в красный цвет?
2. Какая вероятность того, что граф, содержащий эти 4 вершины и все красные рёбра будет деревом?