

Школа лингвистики, 2018-19 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Пятнадцатый семинар (29 октября 2018 года)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Разделите с остатком

- (a) 135 на 15;
- (b) 1 000 000 на 11;
- (c) 10 000 000 на 11;
- (d) 10^n на 11;
- (e) 10 000 на 9;
- (f) 10^n на 9;
- (g) 2^{10} на $2^3 - 1$;
- (h) (-5) на 3;

Задача 2. Найдите остаток от деления

- (a) 123 456 788 765 на 10;
- (b) 7 426 945 542 на 9;
- (c) 741 238 455 на 11.
- (d) 2^{1024} на 3.

Задача 3. Верно ли, что число с суммой цифр 27 обязательно делится на 27?

Задача 4. Докажите что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на (a) 2; (b) 4; (c) 8.

Определение 1. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю n* , если имеют одинаковый остаток от деления на n . Обозначения: $a \equiv b \pmod{n}$.

Задача 5. Пусть $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$. Доказать, что в этом случае

- (a) $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{n}$.
- (b) $ab \equiv cd \pmod{n}$.
- (c) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Подсказка: числа a и b можно представить в виде $a = b + nk$, $c = d + nl$.

Задача 6. Всегда ли верно, что если $ak \equiv bk \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{n}$ при $k \neq 0$?

Задача 7. Пусть p — простое число, $p \geq 3$. Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24.

Системы счисления.

Задача 8. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$264_d = 144_{10}.$$

Задача 9. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$30_d = 27_{10}.$$

Задача 10. Решить уравнение

$$224_x + 1_{17} = 101_8.$$

Задача 11. Указать десятичные записи чисел

$$20121_3, \quad 1011010, 101_2 \quad 4567, 24_8 \quad 2FE, C_{16}.$$

Задача 12. Перевести числа

$$69_{10}, \quad 111_{10}, \quad 537_{10}, \quad 1349_{10}, \quad 2470_{10}, \quad 5263_{10}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20.

Задача 13. Перевести дробные числа

$$55, 75_{10} \quad 113, 625_{10}, \quad 1234, 5678_{10}, \quad \frac{11147_{10}}{27_{10}}$$

в системы счисления с основаниями 2, 3, 8, 12, 16, 20 (с точностью 5 знаков после запятой).

Алгоритм Евклида

Задача 14. С помощью алгоритма Евклида найти НОД чисел

$$1234 \text{ и } 234; \quad 616 \text{ и } 364; \quad 697 \text{ и } 221; \quad 2835 \text{ и } 2431.$$

Задача 15. Решить в целых числах уравнение

- (a) $1234x + 234y = 7;$
- (b) $616x + 364y = 28;$
- (c) $697x + 221y = 51;$
- (d) $2431x + 2835y = 2.$

Задача 16. Найти НОД многочленов

- (a) $2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$ и $4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x + 1;$
- (b) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 8;$
- (c) $x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$ и $x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25;$
- (d) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ и $x^2 - x - 1;$
- (e) $3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ и $3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2;$
- (f) $x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 23x + 21$ и $x^3 + x^2 + x - 3.$