Школа лингвистики, 2018-19 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Тринадцатый, четырнадцатый и пятнадцатый семинары (15, 20 и 29 октября 2018)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Предикат $M(x)$ на множестве людей проверяет, является ли x мужчиной. Предикат $P(x,y)$ проверяет, является ли x родителем y. Переведите следующие высказывания и предикаты с языка кванторов на русский.

(a) $\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$;
(b) $\forall x \exists y\, P(x,y)$;
(c) $\forall x \exists y\, P(y,x)$;
(d) $\forall y \exists x \exists z(P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge M(x) \wedge \overline{M(z)})$;
(e) $\exists x \exists y(P(x,z) \wedge M(x) \wedge P(y,z) \wedge \overline{M(y)} \wedge P(x,t) \wedge P(y,t) \wedge \overline{(z=t)})$;
(f) $\exists x(P(x,z) \wedge M(x) \wedge P(x,t) \wedge \overline{(z=t)})$;

Задача 2. Запишите следующие предикаты и высказывания на языке кванторов.

(a) x и y — единоутробные братья;
(b) x — дед y по материнской линии;
(c) У x есть единственный брат (оба родителя общие).

Задача 3. Рассмотрим двуместный предикат $F(x,y)$ на множестве людей, проверяющий, считает ли человек x человека y своим другом. Что означают следующие высказывания:

(a) $\forall x \forall y\,(F(x,y) \to F(y,x))$;
(b) $\forall x \exists y\, F(x,y)$;
(c) $\exists y \forall x\, F(x,y)$;
(d) $\forall x \exists y\, F(y,x)$;
(e) $\exists y \forall x\, F(y,x)$.
(f) $\forall y \exists x\, F(x,y)$;
(g) $\exists x \forall y\, F(y,x)$;

Задача 4. На множестве $M = \{0,1,2,3,\ldots\}$ заданы предикаты:

$$S(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow x+y=z,$$
$$P(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow xy=z.$$

Записать формулы, задающие предикаты:

(a) $x=0$;
(b) $x=1$;
(c) x — чётное число;
(d) x — простое число (*обратите внимание, новый пункт!*);
(e) $x=y$
(f) x делит y.

Являются ли следующие формулы истинными или ложными в данной модели?

(a) $\exists x \exists y \exists z P(x,y,z)$
(b) $\forall x \forall y \exists z P(x,y,z)$
(c) $\forall x \forall y \forall z P(x,y,z)$

(d) $\exists x \exists y \exists z S(x, y, z)$
(e) $\forall x \forall y \exists z S(x, y, z)$
(f) $\forall x \forall y \forall z S(x, y, z)$
(g) $\exists x \exists y \exists z (S(x, y, z) \& P(x, y, z))$

При каких значениях переменных предикат является истинным,?

(a) $\exists x P(x, y, z)$
(b) $\forall x P(x, y, z)$
(c) $\forall x \exists y P(x, y, z)$
(d) $\exists x \exists y S(x, y, z)$
(e) $\forall x \forall y \forall z S(x, y, z)$
(f) $S(x, y, z) \& P(x, y, z)$

Задача 5. На множестве $M = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ заданы предикаты:

$$S(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z,$$
$$P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow xy = z.$$

I. Записать формулы, задающие предикаты:

(a) x нечётно;
(b) $x \leq y$;
(c) x — наименьшее общее кратное y и z;
(d) x — наибольший общий делитель y и z.

II.* Записать предложение (предикат, не содержащий свободных переменных), выражающее

(a) коммутативность сложения;
(b) ассоциативность умножения;
(c) бесконечность множества простых чисел.

III. Пусть $Q(x)$ — некоторый предикат на множестве M. Записать формулу, утверждающую, что «для любого чётного x выполняется $Q(x)$.»

Задача 6. Являются ли следующие формулы тождественно истинными, тождественно ложными или истинными на некоторых множествах? Если формулы являются истинными на некоторых множествах, то привести примеры таких множеств (и соответствующих предикатов).

(a) $\exists x A(x) \to \forall x A(x)$;
(b) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$;
(c) $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$;
(d) $(\forall x A(x) \& \forall x B(x)) \sim \forall (A(x) \& B(x))$;
(e) $(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \sim (\exists (A(x) \vee B(x)))$;
(f) $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \sim \forall (A(x) \vee B(x))$;
(g) $(\exists x A(x) \& \exists x B(x)) \sim (\exists (A(x) \& B(x)))$;
(h) $(\forall x \exists y A(x, y)) \sim (\exists y \forall x A(x, y))$.