

**Школа лингвистики, 2018-19 уч. год****Дискретная математика для лингвистов****Десятый и одиннадцатый семинары (6, 8, 13 и 15 октября 2018)***В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская*

**Задача 1.** Среди всех людей шпионы составляют  $1/10000$  часть. Опытные Контрразведчики разработали тест для определения шпионов. Если тест проходит нормальный человек, не шпион, то с вероятностью  $0,99$  тест покажет, что это нормальный человек, а с вероятностью  $0,01$  — что шпион. Если же тест проходит шпион, то с вероятностью  $0,9$  тест покажет, что это шпион, а с вероятностью  $0,1$  — что нормальный человек.

- С какой вероятностью случайный прохожий окажется нормальным человеком? Шпионом?
- Для проверки теста Опытные Контрразведчики пробуют на случайном прохожем тест для определения шпионов. С какой вероятностью случайный прохожий окажется нормальным человеком, на котором тест ошибся и показал, что это — шпион?
- С какой вероятностью случайный прохожий окажется шпионом, на котором тест не ошибся и показал, что это — шпион?
- С какой вероятностью тест покажет, что случайный прохожий — шпион?
- Тест показал, что случайный прохожий — шпион. С какой вероятностью он действительно шпион?

**Задача 2.** (а) Сколько функций алгебры логики  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  удовлетворяет условию  $f(0, 0, 0, 0) = f(1, 1, 1, 1)$ ?

- Сколько функций алгебры логики  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  удовлетворяет условию  $f(0, 0, \dots, 0) = f(1, 1, \dots, 1)$ ?

**Задача 3.** Сколько функций алгебры логики  $f(x, y, z)$  существенно зависят от всех трёх переменных  $x, y, z$ ?

**Задача 4.** Составьте таблицы истинности для функций, заданных следующими формулами.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| (a) $\overline{\overline{x \& y}}$              | (d) $x \vee \overline{y}$ ;                     | (g) $x \rightarrow y$ ;                                      |
| (b) $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ | (e) $x \wedge \overline{x}$ ;                   |  |
| (c) $\overline{x} \vee y$ ;                     | (f) $(x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y}$ ; | (h) $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$ . |

**Задача 5.** Решить систему

- $$\begin{cases} x \oplus y \oplus z = xy \\ ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{z}) = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x \oplus y \oplus z = 1 \\ xy \oplus z = 0 \end{cases}$$

**Задача 6.** На скольких наборах  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  функция алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  обращается в 1?

- $x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 x_5 \oplus x_1 x_2 x_4 x_5 \oplus x_1 x_3 x_4 x_5 \oplus x_2 x_3 x_4 x_5$ , ( $n = 5$ );
- $x_1 x_2 x_3 \oplus x_3 x_4 x_5 \oplus x_6$ , ( $n = 6$ );
- $f(x_1, \dots, x_n) = (\dots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \dots) \rightarrow x_n$ .

**Задача 7.** Используя таблицы истинности, доказать эквивалентность формул.

- (a)  $\overline{x \rightarrow y}$  и  $x\bar{y}$ ;  
 (b)  $x \sim y$  и  $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$ ;  
 (c)  $x \rightarrow (y \vee z)$  и  $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$ .

**Задача 8.** Используя дополнительно основные эквивалентности, выяснить, эквивалентны ли формулы

- (a)  $xy \vee z$  и  $\overline{\overline{xy} \vee \overline{z}}$ ;  
 (b)  $xy \oplus xz \oplus yz$  и  $\overline{\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}}$ ;  
 (c)  $(\overline{x} \rightarrow y) \rightarrow (\overline{xy} \sim (x \oplus y))$  и  $(\overline{xy} \rightarrow x) \rightarrow y$ ;  
 (d)  $(x \oplus yz) \rightarrow (\overline{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$  и  $x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x)$ ;  
 (e)  $((x \vee y) \rightarrow yz) \vee (y \rightarrow xz) \vee (x \rightarrow (\overline{y} \rightarrow z))$  и  $(x \rightarrow y) \vee z$ .

**Задача 9.** Представить в виде СДНФ

- (a)  $x \vee y$ ;  
 (b)  $(x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3$ ;  
 (c) (01010001);  
 (d)  $(x_1 \oplus x_2)(x_3 \rightarrow \overline{x_2}x_4)$ ;

**Задача 10.** Представить в виде СКНФ

- (a)  $x_1 \oplus x_2$ ;  
 (b)  $x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_3$ ;  
 (c) (00101110).

**Задача 11.** Написать формулу, использующую только функции  $x \& y$ ,  $x \oplus y$  и 1, а затем упростить её, для функций

- (a)  $x \vee y \vee z$ ;  
 (b)  $xy \vee xz \vee yz$ .

**Задача 12.** Выразима ли функция  $x \oplus y$  через функцию  $x \rightarrow y$ ?

**Задача 13.** (a) Выразить функцию  $x \downarrow y$  через функцию  $x \mid y$ .

- (b) Выразить функцию  $x \downarrow y$  через функцию  $x \mid y$  с использованием минимально возможного числа операций (связок)  $f \mid g$ .

**Задача 14.** Напишите отрицания к следующим утверждениям.

- (a) Сегодня хорошая погода.  
 (b)  $\sqrt{\pi^4 + 1} > 10$ .  
 (c) Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять в парк.

**Задача 15.** В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

**Задача 16.** На аварийном пульте системы расположены 4 ламочки:  $L_1, L_2, L_3, L_4$ . Система выключается только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- (a) загорелась  $L_1$ , но не загорелась  $L_2$ ;  
 (b) загорелись  $L_2$  и  $L_3$ , но не горит  $L_4$ ;  
 (c) загорелась  $L_4$  и не горит  $L_1$ .  
 (a) Построить таблицу функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , характеризующей условия выключения системы.  
 (b) Построить формулу этой функции.