

**Школа лингвистики, 2018-19 уч. год****Дискретная математика для лингвистов****Восьмой и девятый семинар (29 сентября и 1 октября 2018)**

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

**Комбинаторика**

**Задача 1.** Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды?

**Задача 2.** а) Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых цифры расположены по убыванию? б) А пятизначных? с) А если снять ограничение на число знаков?

**Задача 3.** Сколькими различными способами можно прочитать слово «строка», двигаясь вправо или вниз?:

С	Т	Р	О	К	А
Т	Р	О	К	А	
Р	О	К	А		
О	К	А			
К	А				
А					

**Задача 4.** В офисе стоит а) 10; б) 7 компьютеров, каждый соединен сетевым проводом с тремя другими. Сколько всего проводов?

**Задача 5.** У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого — 8. (Все книги — разные.) Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

**Задача 6.** Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

**Задача 7.** В алфавите есть шесть букв. *Красивеньким* называется слово, в котором есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько существует красивеньких слов?

**Задача 8.** Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть ровно три единицы?

**Задача 9.** Жюри лингвистической олимпиады решило присудить 3 диплома первой степени, 3 диплома второй степени и 2 диплома третьей степени. В «короткий список» попало 11 участников. Сколькими способами можно среди попавших в короткий список распределить дипломы, чтобы каждый диплом нашел своего хозяина?

**Дополнительные задачи**

**Задача 10.** Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

**Задача 11.** Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

**Задача 12.** Сколькими способами натуральное число  $n$  можно представить в виде суммы

- (а)  $k$  натуральных слагаемых?
- (б)  $k$  неотрицательных слагаемых?

(представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)

**Задача 13.** Сколькими способами группу из 12 студентов можно разбить на 6 пар?

**Задача 14.** Сколько различных перестановок можно образовать из слова «ОБРАЗОВАНИЕ», сохраняя порядок гласных букв (то есть гласные должны быть расположены в порядке О, А, О, А, И, Е)?

### Индукция

**Задача 15.** Докажите тождество  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ .

**Задача 16.** Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении  $n : (n + 1)$ , где  $n$  – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

**Задача 17.**  $n$  разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем  $\frac{1}{n}$  долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

### Формула включений и исключений

**Задача 18.** На одной из кафедр университета работают 13 человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский, пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Выяснить:

- (а) сколько человек знают все три языка;
- (б) сколько человек знают ровно два языка;
- (с) сколько человек знают только английский язык.

**Задача 19.** (а) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

- (б) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.
- (с) Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

**Задача 20.** Пусть  $U$  — множество из  $n$  ( $n \geq 3$ ) элементов.

- (а) Найти число пар  $(X, Y)$  таких подмножеств множества  $U$ , что  $X \cap Y = \emptyset$ .
- (б) Найти число пар  $(X, Y)$  таких подмножеств множества  $U$ , что  $|X \Delta Y| = 1$ .
- (с) Найти число пар  $(X, Y)$  таких подмножеств множества  $U$ , что  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $|X| \geq 2$ ,  $|Y| \geq 3$ .
- (д) Найти число пар  $(X, Y)$  таких подмножеств множества  $U$ , что  $|X \Delta Y| = 1$ ,  $|X| \geq 2$ ,  $|Y| \geq 3$ .

**Задача 21.** Сколькими способами можно расположить за столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

## Вероятность

**Задача 22.** В корзине семь яблок сорта «Комсомолец Бурятии» и четыре сорта «Слава Мичуринска». Наугад вытащили четыре яблока. Какова вероятность, что среди них есть по два яблока каждого из сортов?

**Задача 23.** Монетку подбросили два раза. Событие  $A$  — выпадение хотя бы одной решки, событие  $B$  — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- Найдите вероятность события  $AB$ .
- Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Задача 24.** Игральный кубик подбросили два раза. Событие  $A$  — выпадение в первый раз четвёрки, событие  $B$  — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- Найдите вероятность события  $AB$ .
- Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Задача 25.** Монетку подбросили четыре раза. Событие  $A$  — выпадение орла в четвёртый раз, событие  $B$  — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- Найдите вероятность события  $AB$ .
- Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Определение 1.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события  $A$  равна вероятности события  $A$  при условии  $B$ , а вероятность события  $B$  равна вероятности события  $B$  при условии  $A$ :

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

**Задача 26.** Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, то есть выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Все элементарные исходы мы считаем равновероятными. Зависимы ли события  $A$  — (выпадение орла в первый раз) и  $B$  — (выпадение орла во второй раз)?

**Задача 27.** Известно, что среди математиков шизофреники встречаются в 10 раз чаще, чем среди людей в целом. Зависимы ли события  $A$  — (случайно взятый человек оказался математиком) и  $B$  — (случайно взятый человек оказался шизофреником)?

**Задача 28.** Монетку подбросили четыре раза. Событие  $A$  — (выпало не меньше трёх орлов), событие  $B$  — (выпала хотя бы одна решка).

- (a) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $A$  и найти его вероятность.
- (b) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $A$  и найти его вероятность.
- (c) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $A + B$  (выполняется хотя бы одно из событий  $A$  и  $B$ ) и найти его вероятность.
- (d) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию  $AB$  (оба события  $A$  и  $B$  выполняются) и найти его вероятность.
- (e) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

**Задача 29.** В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие  $A$  — (выбрали туза), событие  $B$  — (выбрали пиковую карту).

- (a) Найти вероятности событий  $A$  и  $B$ .
- (b) Какие элементарные исходы благоприятны событию  $AB$ ? Найти вероятность этого события.
- (c) Какие элементарные исходы благоприятны событию  $A + B$ ? Найти вероятность этого события.
- (d) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.
- (e) Зависимы ли события  $A$  и  $B$ ?

**Задача 30.** Тормозная система автомобиля имеет два независимых контура. Вероятность отказа каждого из контуров равна  $1/10000$ .

- (a) С какой вероятностью система торможения не сработает? (для этого должны отказать оба контура)
- (b) Один из контуров повреждён. Чему равна вероятность отказа системы торможения? Во сколько раз она превышает вероятность отказа при двух работающих контурах?

**Задача 31.** Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна  $0,001\%$ . Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки).

**Задача 32.** В Тридевятом царстве живёт 1000 девушек. Из них 300 — писанные красавицы, 100 — умницы-разумницы. Иван-царевич решил жениться непременно на писаной красавице и умнице-разумнице. Оказалось, что есть 30 подходящих невест. Являются ли независимыми события «случайно выбранная девушка является писаной красавицей» и «случайно выбранная девушка является умницей-разумницей»?

**Задача 33.** Данила-мастер тоже живёт в Тридевятом царстве, и хочет жениться на искуснице-умелице (вопрос об уме или красоте избранницы его не интересует). Встречаются они редко: всего 10 таких девушек есть в Тридевятом царстве. Причем среди них 5 писанных красавиц.

- (a) Где Даниле лучше искать себе невесту — среди всех девушек, или среди писанных красавиц?
- (b) Выберем случайную девушку среди всех девушек царства. Являются ли независимыми события «девушка оказалась писаной красавицей» и «девушка оказалась искусницей-умелицей»?