Школа лингвистики, 2018-19 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Четвёртый и пятый семинар (15, 17 сентября 2018)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Докажите с помощью метода математической индукции, что число способов, которыми можно расставить n человек в ряд, равно $n!$ (сформулируйте явно утверждения, являющиеся базой индукции и индуктивным переходом, и докажите их).

Задача 2. (a) $1 \times 1! + 2 \times 2! + ... + n \times n! = (n+1)! - 1$;
(b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
(c) $3^n \geq n^2$;
(d) $n! \geq 2^{n-1}$.

Задача 3. Пусть $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что для всякого натурального числа n, сумма $x^n + \frac{1}{x^n}$ – тоже целое число.

Задача 4. Докажите, что продавец Иннокентий сможет уравновесить на весах корзину с редиской веса n грамм (где $n > 8$), имея только гирьки веса 3 грамма и веса 5 грамм.

Задача 5. Егор Иванович умеет рвать клочок бумаги на 4 и 6 кусочков. Верно ли, что Е. И. сможет порвать клочок бумаги на любое число частей n (где $n > 8$)?

Задача 6. В кругу друзей Александра Сергеевича из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная только ему одному. Друзья могут встретиться, и за одну встречу каждый может узнать все новости, известные другому. Проблема в том, что встречаться можно только по двое. Александр Сергеевич догадался, что что за $2k - 4$ встречи все k людей смогут узнать все новости. Почему?

Задача 7. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geq 1$. Найдите a_n.

Задача 8. На какое наибольшее число частей могут делить плоскость n прямых?

Задача 9. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

Задача 10. Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ – простое при любом натуральном n?

Задача 11. (a) Показать, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$.
(b) Показать, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$ (всего n корней, $n \geq 1$.)

Задача 12. На краю пустыни имеется большои запас бензина и машина, которая при полнои заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любои точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Задача 13. Имеется два стакана, в первом стакане налито некоторое количество воды, а во втором — такое же количество спирта. Разрешается переливать некоторое количество жидкости из одного стакана в другои (при этом раствор равномерно перемешивается). Можно ли с помощью таких операции получить в первом стакане раствор, в котором процентное содержание спирта больше, чем во втором?

Задача 14. На столе стоят восемь стаканов с морсом. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества морса, перелив часть морса из одного стакана в другои. Докажите, что с помощью таких операции можно добиться того, чтобы морса во всех стаканах было поровну.

Задача 15. Верно ли, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности Фибоначчи?

Задача 16. На окружности заданы $2n$ точек. Сколькими способами можно попарно соединить эти точки n непересекающимися отрезками?

Задача 17. В меню первое блюдо можно выбрать 17 способами, а второе — 16 способами. Сколькими способами можно выбрать обед из такого меню?

Задача 18. Сколько диагоналей (отрезков, соединяющих вершины, но при этом не являющихся сторонами) можно провести в правильном 17-угольнике?

Задача 19. Из города A в город B ведут 3 дороги, из города B в город C ведут 4 дороги, из города C в город D ведут 4 дороги. Других дорог нет. Сколькими способами можно проехать из города A в город D?

Задача 20. В связи с проведением в городе C олимпиды, построили ещё одну дорогу из города A в город B, а также четыре дороги, ведущие из города A в город C напрямую. Сколькими способами можно проехать из города A в город C теперь?

Определение 1. *Словом* мы будем называть любую последовательность букв, выбранных из некоторого алфавита. Слово не обязано быть «осмысленным». Алфавит — это любой набор символов, не обязательно реально существующий алфавит какого-то языка.

Задача 21. Сколько существует слов в алфавите $\{a, b, c, d\}$, состоящих из

(a) одной или двух букв?
(b) двух или трёх букв?
(c) одной, двух или трёх букв?

Задача 22. Жители страны Анаграмии используют алфавит из четырёх букв $\{a, b, c, d\}$, но используют только слова, в которых все буквы различны. Все такие слова являются осмысленными в языке этой страны. При этом любые два слова, отличающиеся только порядком букв, являются синонимами. Ни в каком другом случае два слова синонимами не являются.

(a) Сколько синонимов есть у слова a?
(b) Сколько синонимов есть у слова ab?
(c) Сколько различных (по смыслу) слов можно составить из двух букв?
(d) Сколько синонимов есть у слова abc?
(e) Сколько различных (по смыслу) слов можно составить из трёх букв?

(f) Сколько синонимов есть у слова *abcd*?
(g) Сколько различных (по смыслу) слов можно составить из четырёх букв?

Задача 23. (*) В Москве 7 высотных зданий. Если смотреть на них издалека, они в каком-то порядке располагаются на линии горизонта. Если смотреть из разных точек, будут разные способы расстановки. Турист едет по московской кольцевой автодороге и постоянно смотрит на высотки. Увидит ли он все возможные расстановки высоток, когда завершит круг?

Задача 24. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове

(a) `КРОНА`?
(b) `КОРОВА`?
(c) `МАТЕМАТИКА`?
(d) `АББББББББ`?
(e) `ААББББББ`?
(f) `АААБББББ`?
(g) `ААААББББ`?
(h) `АААААБББ`?

Задача 25. Сколькими способами можно выбрать
(a) Одного человека из восьми?
(b) Двух человек из восьми?
(c) Трёх человек из восьми?
(d) Четырёх человек из восьми?
(e) Пять человек из восьми?
(f) Восемь человек из восьми?
(g) k человек из n человек?

Определение 2. Ответ на последний пункт предыдущей задачи называется *биномиальным коэффициентом* или *числом сочетаний из n по k*, обозначается C_n^k.

Задача 26. (a) Сколькими способами можно выбрать 4 человек из 10?
(b) Сколькими способами можно выбрать 6 человек из 10?
(c) В городе Нью-Васюки все улицы — прямые, и причем любые две улицы либо параллельны, либо пересекаются под прямым углом, а сам город имеет форму прямоугольника, длиной в 6 кварталов и шириной в 4 квартала. Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь только по улицам и только вверх и вправо?
(d) Почему ответы на все эти пункты совпадают?
(e) В городе Нью-Васюки сменился мэр, после чего к нему присоединили часть нью-васюковской области. В результате город сохранил свою планировку, но стал иметь форму прямоугольника со сторонами l и m кварталов. Сколькими способами теперь можно пройти из левого нижнего угла в правый верхний?

Задача 27. В правом верхнем углу города Нью-Васюки (длиной l кварталов и шириной m кварталов) находится телеграф. Ровно на один квартал ниже его находится библиотека. Ровно на один квартал левее телеграфа находится банк. Сколькими способами можно добраться из левого нижнего угла до
(a) библиотеки?
(b) банка?

(c) телеграфа?
(d) Доказать формулу $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
(e) Доказать формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача 28. Сколькими способами можно выбрать

(a) Одного человека из пяти?
(b) Двух человек из пяти?
(c) Трёх человек из пяти?
(d) Четырёх человек из пяти?
(e) Пять человек из пяти?
(f) Сколько-нибудь человек из пяти (может быть никого)?

Задача 29. Доказать равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \tag{1}$$