

Школа лингвистики, 2018-19 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Первый семинар (3 сентября 2018)

В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Задача 1. Про множества A и B известно, что $|B| \leq |A|$. Верно ли, что $B \subseteq A$?

Задача 2. Известно, что $|A| = 3$, $|B| = 5$. Верно ли, что $|A \Delta B| \leq 5$? Какие значения может принимать число $|A \Delta B|$?

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны для любых множеств A , B и C :

- а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
 д) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$; е) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$?

Задача 4. Нарисуйте все отображения

- (а) из множества $\{1, 2, 3\}$ в множество $\{1, 2\}$;
 (б) из множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, 3\}$.

Какие отображения из множества $1, 2, 3$ в себя могут быть получены композицией отображений из пунктов а) и б)?

Задача 5. Среди следующих отображений укажите все биекции, инъекции и сюръекции:

- (а) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, где $x \rightarrow nx$, $n \in \mathbb{Z}$;
 (б) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, где $x \rightarrow bx$, $b \in \mathbb{Q}$;
 (в) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $x \rightarrow x^2$;
 (г) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, где $x \rightarrow x^2$;
 (д) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $x \rightarrow x^3$.

Какие из отображений обратимы?

Задача 6. На окружности отмечены 1000 белых точек и одна черная. Чего больше: треугольников с вершинами в белых точках или четырехугольников, у которых одна вершина черная, а остальные три — белые?

Задача 7. Из ста женщин африканского племени Мумбо-Юмбо 40 умеют делать ожерелья из кокосов, 70 умеют вязать набедренные повязки из банановой травы и 30 женщин умеют делать оба дела. Сколько женщин в племени не смогут сделать ни того, ни другого?

Задача 8. В том же самом племени Мумбо-Юмбо из предыдущей задачи существует особый класс женщин (всего 15), способных изловить и приготовить слона. Известно, что 7 женщин могут приготовить слона и сделать ожерелье, 5 женщин смогут приготовить слона и связать повязку и только три женщины умеют делать все три дела. Сколько дам в племени не могут сделать ничего (ни изловить и приготовить слона, ни сделать повязку, ни сделать ожерелье)?

Задача 9. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? Ответ обоснуйте.

Задача 10. (Льюис Кэрролл) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

Задача 11. Куб со стороны 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трех направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через A) записана единица. Через кубик A проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

Задача 12. Докажите, что

- (а) множество точек отрезка $[5, 3]$ и отрезка $[15, 33]$ равномощны;
- (б) интервал $(0, 1)$ и луч $(0, \infty)$ равномощны.

Задача 13. Счётно ли объединение

- (а) конечного множества со счётным множеством;
- (б) конечного числа счётных множеств;
- (с) счётного числа счетных множеств?

Задача 14. Счетно ли любое бесконечное множество непересекающихся

- (а) интервалов на прямой, имеющих длину больше 1;
- (б) любых интервалов на прямой;
- (с) кругов на плоскости;
- (д) «восьмёрок» на плоскости (восьмёрка — это любые две окружности, касающиеся внешним образом);
- (е) букв «Т» на плоскости?

Задача 15. Верно ли, что квадрат со стороны единица равномощен отрезку $[0, 1]$?