Одна из задач, рассмотренных на прошлой лекции, в общем виде имеет следующий вид. Пусть у нас имеется n различных предметов, нам нужно выбрать k из них, причём порядок в выборке не важен.

Существует два стандартных обозначения этого числа:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \text{ и } \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Мы уже выяснили, сколько существует способов выбрать k предметов из n. Заметим, что мы также можем выбрать «остающиеся» предметы. Например, если нам нужно выбрать 18 человек из 20, то можно также выбрать тех 2, которые «остаются», результат будет тот же самый. Наши рассуждения подтверждает следующая цепочка равенств:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Проверим ещё одно равенство:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Левая часть равенства показывает нам, сколько существует способов выбрать k предметов из n. Если мы не выбрали первый предмет, то нам нужно выбрать k предмет из $n-1$, для чего существует C_{n-1}^k возможностей. Если же первый предмет выбран, то из оставшихся $n-1$ предметов нужно выбрать $k-1$. Проверим это строго:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n-k+k}{k \cdot (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Пример 5а. Какой коэффициент получается при слагаемом $a^{13}b^4$ при раскрытии скобок и приведении подобных слагаемых в выражении $(a+b)^{17}$?

Посмотрим, какие слагаемые вообще могут быть в выражении. При перемножении 17 выражений вида $(a+b)$ из каждой скобки берется либо a, либо b, а значит каждое слагаемое имеет вид $a^k b^{17-k}$, при этом k принимает значения от 0 до 17. Посмотрим, сколько слагаемых вида $a^{13}b^4$ встретится при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^{17}$. Такое слагаемое встречается в том случае, если мы из 13 скобок берем множитель a, а из оставшихся 4 — множитель b. Выбрать 13 скобок из 17 мы можем C_{17}^{13} способами. А значит, коэффициент при $a^{13}b^4$ будет

$$C_{17}^{13} = \frac{17!}{13! \cdot 4!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 17 \cdot 14 \cdot 10 = 2380.$$

Обобщим этот пример. Посмотрим, какой коэффициент получается при слагаемом $a^k b^{n-k}$ при раскрытии скобок и приведении подобных слагаемых в выражении $(a+b)^n$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно установить, что, во-первых, все слагаемые имеют вид $a^k b^{n-k}$, где k принимает значения от 0 до n, а во вторых, при раскрытии скобок слагаемое $a^k b^{n-k}$ встречается C_n^k раз для всех k, $0 \le k \le n$. Поэтому, при приведении подобных слагаемых, коэффициент при $a^k b^{n-k}$ равен C_n^k. Следовательно, имеет место равенство

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^k + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^n a^n b^0.$$

Это равенство можно также доказать по индукции. 1. База индукции.

$$(a+b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0.$$

2. Индуктивный переход. Пусть для всех $m \le n$ выполняется равенство

$$(a+b)^m = C_m^0 a^0 b^k + C_m^1 a^1 b^{m-1} + \ldots + C_m^k a^k b^{m-k} + \ldots + C_m^m a^m b^0.$$

Покажем, что в этом случае равенство выполняется и для $n+1$. По предположению индукции выполняются равенства.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (C_n^0 a^0 b^k + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^n a^n b^0) \cdot (a+b) =$$
$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right) \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}\right) =$$
$$C_n^0 a^0 b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}\right) + C_n^n a^{n+1} b^n$$

Используя равенства $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$, $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (доказано выше), получаем:

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1}\right) + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^n =$$
$$C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k a^k b^{n-k+1} + C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1}\right) + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^n =$$
$$C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^k b^{n-k+1} + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^n =$$
$$C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1} + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^n = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1}.$$

Следовательно, исходное равенство верно для всех натуральных n

тут ещё предполагается написать про треугольник Паскаля