Сегодня начинаем говорить о комбинаторике. Центральной задачей комбинаторики можно считать задачу размещения объектов в соответствии с определёнными правилами и нахождения числа способов, которыми это можно сделать.

1 Общие соображения

Правило суммы. Если множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), и нужно выбрать один элемент из множества $A \cup B$, при этом множества A и B не содержат общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), то такой выбор можно осуществить $n + m$ способами.

Пример 2. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать старосту из группы. Тогда существует 6+15=21 способ выбрать старосту.

Правило произведения. Если множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), и нужно выбрать один элемент из множества A и один элемент из множества B, то такой выбор можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Пример 3a. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать пару «юноша и девушка» среди присутствующих. Это можно сделать $6 \cdot 15 = 90$ способами.

Пример 3b. В столовой имеется чай, кофе, компот, вода и 7 видов выпечки. Студентка собирается перекусить каким-нибудь напитком с булочкой. Она может выбрать перекус $4 \cdot 7 = 28$ способами.

Замечание. В советах «как все время одеваться по-разному при небольшом гардеробе» это правило используется постоянно (и каждый раз выдается за необыкновенное открытие). Например, если у девушки имеется 3 пары брюк, 2 юбки и 4 кофточки, то у неё имеется $(3 + 2) \cdot 4 = 20$ вариантов комплектов. А если к этому добавить пару жакетов, то число вариантов утраивается (можно пойти в одном из жакетов или без него).

Факториал. Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Обозначается $n!$. Для удобства считается, что $0! = 1$.

Можно определить факториал числа по индукции.

1. $0! = 1$.
2. $n! = n \cdot (n - 1)!$.

2 Упорядоченная выборка с повторениями

Пример 4a. Пусть у нас имеются 20 различных карандашей и 7 ящиков (различных). Сколькими способами можно разложить карандаши по ящикам? Первый карандаш можно положить в любой из семи ящиков, второй — тоже в любой из семи ящиков. И так каждый карандаш можно положить в любой из семи ящиков. Таким образом получаем, что всего имеется

$$\underbrace{7 \cdot \ldots \cdot 7}_{20\text{ раз}} = 7^{20} = 79\,792\,266\,297\,612\,001 \approx 8 \cdot 10^{16}$$

способов разместить 20 карандашей по 7 ящикам.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов и k ящиков. Тогда каждый предмет можно положить в любой из k ящиков. Следовательно, получаем, что всего имеется

$$\underbrace{k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ раз}} = k^n$$

способов разместить n предметов по k ящикам.

Пример 4b. Аналогичным образом можно посчитать, сколько существует способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов. Действительно, поскольку каждый предмет можно раскрасить в любой из k цветов, то всего существует

$$\underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{15 \text{ раз}} = 10^{15}$$

способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов.

3 Упорядоченная выборка без повторений

Пример 5a. Пусть у нас имеется 10 различных новогодних подарков и 15 различных подарочных пакетов. Любой подарок можно положить в любой пакет. Сколько существует способов упаковать подарки? Как и в предыдущих задачах, первый подарок можно положить в любой из 15 пакетов. Для второго подарка останется на выбор 14 пакетов. Для третьего — 13, для последнего — 6. Таким образом, существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 6 = 10\,897\,286\,400 \approx 10^{10}$ способов упаковать подарки. Используя обозначение факториала, это значение можно записать следующим образом.

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{15!}{5!}.$$

Аналогичное соотношение получим для n подарков и k пакетиков. Первый подарок можно упаковать в любой из k пакетов, второй — в любой из оставшихся $k-1$ пакетов, третий — в один из оставшихся $k-2$ пакетов,…, последний — в любой из оставшихся $k-n+1$ пакетов. Поэтому всего будет

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) = \\ = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (k-n) \cdot (k-n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(k-n) \cdot (k-n-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{k!}{(k-n)!}$$

способов упаковать подарки.

Пример 5b. В гостинице 15 одноместных номеров. Сколько способов существует расселить 5 постояльцев по этим номерам (каждый постоялец собирается жить в отдельном одноместном номере). Первого постояльца можно поселить в одну из 15 комнат, второго — в одну из 14, третьего — в одну из 13, четвертого — в одну из 12, пятого — в одну из 11. Поэтому всего существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$ способов расселить 5 постояльцев в 15 одноместных номеров.

Перестановки.

Пример 6a. На карточках написаны числа от 1 до 7. Посмотрим, сколькими способами можно выложить эти карточки в ряд. На первое место можно поместить одну из семи карточек. На второе — одну из шести,…, на предпоследнее — одну из двух, на последнее — одну оставшуюся карточку. Таким образом, всего существует $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способов выложить 7 карточек в ряд.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов. Сколькими способами можно их упорядочить (пронумеровать)? На первое место можно поместить любой из n предметов, на второе — любой из оставшихся $n-1$ предметов,..., на k-е место можно поместить любой из оставшихся $n-k+1$ предметов,..., на последнее — один оставшийся предмет. А значит, всего существует $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ способов упорядочить n различных предметов.

Пример 6b. Занятие у вас закончилось чуть раньше и никого больше в столовой нет (8 юношей, 14 девушек). Сколькими способами вы можете выстроиться в очередь? В соответствии с рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}$$

способов.

Пример 6c. А если на первое место пропустим одну из девушек? Тогда первый человек может быть выбран 14 способами, второй — 21 способом, третий — 20 способами,..., предпоследним может быть один из двух, а в конец встает оставшийся. Получаем

$$14 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 14 \cdot 21! \approx 7 \cdot 10^{20}.$$

Пример 6d. Молодые люди решили пропустить всех девушек вперед. Тогда очередь распадается на две части. Сначала упорядочиваем всех девушек 14! способами, а потом всех юношей 8! способами. Используя правило произведения получаем, что выстроить существует

$$14! \cdot 8! = 87\,178\,291\,200 \cdot 40\,320 = 3\,515\,028\,701\,000\,000 approx 3.5 \cdot 10^{15}$$

способов выстроиться в очередь таким образом.

Упорядоченное размещение n предметов по k ящикам.

Пример 7a. Посчитаем теперь способы поставить нашу группу из 22 человек другим спобом. Теперь будем выбирать не следующего человека, которого ставим в очередь, а место в очереди для следующего человека, а люди пусть у нас как-то уже занумерованы. Первого человека можем поставить к кассе и все. Второго — либо перед первым, либо после. Третьего — к кассе, между двумя предыдущими или в конец. При этом каждый следующий человек делит «свой кусочек очереди» на две части. Поэтому k-го человека можно поставить на k мест. Следовательно, и при таком способе подсчета вариантов имеем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.

Пример 7b. Пусть в столовой открылась вторая и третья кассы. Теперь первого человека можем поставить в одну из 3 касс — три способа. Второго — либо в одну из двух пустых касс, либо в кассу, где стоит первый, причем двумя способами: до или после него. Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = \\ = \frac{24!}{2!} = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000 \approx 6 \cdot 10^{23}$$

способов поставить 22 человека в 3 кассы.

Обобщим этот пример. Теперь мы хотим поставить n человек в k касс. Первого человека можем поставить в любую из k касс. Также как и в предыдущих случаях, Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$k(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1) = \\ = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)k(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

способов поставить n человек в k очередей.

Пример 7c. Посчитаем, сколькими способами можно расставить 7 книг на 3 полках. В данном случае нам порядок важен, поэтому задача похожа на расстановку людей в очереди. В таком случае получаем

$$3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 8\cdot 9 = \frac{9!}{2} = 181\,440$$

способов расставить 7 книг на 3 полках.

Пример 8. Пусть у нас имеется 15 различных деревянных игрушек. Сколькими способами можем их раскрасить в 5 цветов (каждую игрушку красим ровно в один цвет)?

Первую игрушку можем покрасить в один из 5 цветов, вторую — тоже в один из пяти цветов, и так каждую из 15 игрушек можем покрасить в один из 5 цветов. Всего получаем

$$\underbrace{5\cdot 5\cdot\ldots\cdot 5}_{15} = 5^{15} = 30\,517\,578\,125 \approx 3\cdot 10^{10}.$$

4 Неупорядоченная выборка без повторений

Пример 9. На полке стоит 15 различных книжек, а в сумку помещаются только 3. Сколькими способами можно взять 3 книжки с полки (в сумку)?

Предположим сначала, что расположение (порядок) книжек в сумке важен. Тогда первую книжку мы можем взять одну из 15, вторую — одну из 14, третью — одну из оставшихся 13. То есть всего $15\cdot 14\cdot 13$ способов. Пусть мы взяли книжки A, B, C. Если они у нас лежат в сумке «кучей», то упорядочить мы их можем $3! = 6$ способами. Значит, каждому беспорядочному набору из 3 книжек соответствует 6 упорядоченных наборов. Важно отметить, что разным неупорядоченным наборам соответствуют разные упорядоченные наборы. Число упорядоченных наборов мы знаем, поэтому получаем, что число «кучек» равно

$$\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 455.$$

Обобщим эту задачу. Пусть у нас имеется n предметов, нам нужно выбрать k из них. Если бы был важен порядок предметов (например, книги на полке), то было бы $\frac{n!}{(n-k)!}$ способов сделать выбор. Поскольку k предметов можно упорядочить $k!$ способами, то каждой неупорядоченной выборке из k предметов соответствует $k!$ упорядоченных наборов. А значит, существует $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ способов выбрать k элементов из n.

Существует два стандартных обозначения этого числа:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right).$$

5 Неупорядоченная выборка с повторением

Размещение n предметов по k различным ящикам. Разбиение натурального числа. Раскраска n предметов в k цветов.

Пример 10. Преподаватель берёт перед занятиями 10 маркеров. Они могут быть красными, синими, черными и зелеными. Сколько способов взять набор из 10 маркеров существует? Все маркеры одного цвета одинаковые.

Давайте возьмем 10 маркеров и разложим по 4 «ящикам с краской». У нас получится примерно следующее:

$$|\underbrace{ooo}_{\text{к}}|\underbrace{oo}_{\text{с}}|\underbrace{oo}_{\text{ч}}|\underbrace{ooo}_{\text{з}}|$$

или так:

$$|\underbrace{ooooo}_{\text{к}}|\underbrace{\quad}_{\text{с}}|\underbrace{oooo}_{\text{ч}}|\underbrace{o}_{\text{з}}|$$

или даже так (все-таки черный цвет маркера на лекции предпочтителен):

$$|\underbrace{\quad}_{\text{к}}|\underbrace{\quad}_{\text{с}}|\underbrace{oooooooooo}_{\text{ч}}|\underbrace{\quad}_{\text{з}}|.$$

В любом случае у нас имеется 10 маркеров и 3 «разделителя по цветам» (крайние вертикальные палочки положения не меняют), которые мы и располагаем на 13 последовательных местах. А значит, нам надо выбрать из 13 мест 3 для «разделителей», а остальные заполнить «маркерами-кружочками» единственным способом. Сделать это можно $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$ способами.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n предметов которые мы хотим разложить по k ящикам (или, что то же самое, раскрасить в k цветов). Тогда опять же, нам n предметов и $k-1$ разделитель надо упорядочить на $n+k-1$ месте. Выбрать места для «разделителей» можно C_{n+k-1}^{k-1} способами. На остальные n мест n одинаковых предметов размещаются единственным образом. Следовательно, существует C_{n+k-1}^{k-1} способов разложить n предметов по k ящикам.

Обобщим некоторые результаты. Пусть у нас есть выборка k предметов из n. Тогда число способов считается следующим образом, в зависимости от того, упорядоченная ли выборка и есть ли повторения.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$