Школа лингвистики, 2018-19 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Графы-2 (10 и 17 ноября 2018 г.)
В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

1 Графы (продолжение)

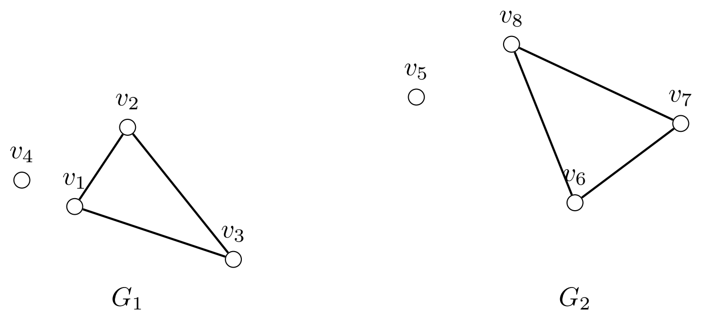
1.1 Изоморфизм графов

В этот раз мы поговорим о том, какие графы считаются «одинаковыми».

Пример 1. Рассмотрим графы $G_1 = (V_1, E_1)$, где $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, где $V_2 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$, $E_2 = \{(v_8, v_7), (v_8, v_6), (v_7, v_6)\}$. Являются ли эти графы одинаковыми?

Очевидно, что формально это разные графы. Однако если сопоставить вершины v_1 и v_8, v_2 и v_7, v_3 и v_6, v_4 и v_5, то можно отметить, что ребро между двумя вершинами в графе G_1 существует в том и только том случае, когда существует ребро между вершинами, сопоставленными этим вершинам, во втором графе.

Пример 2. Рассмотрим графы, изображенные ниже



Являются ли эти графы одинаковыми?

Аналогично предыдущему случаю можно сопоставить вершины v_1 и v_8, v_2 и v_7, v_3 и v_6, v_4 и v_5. Тогда будет и взаимооднозначное соответствие между ребрами. Отметим, что это не единственный способ сопоставить вершины так, чтобы графы при наложении совпали.

Графы из примеров 1 и 2 называются изоморфными. Дадим точное определение.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — простые неориентированные графы. Они называются изоморфными, если существует взаимооднозначное соответствие $\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$, такое, что для любой пары вершин u, v из V_1 ребро (u, v) содержится в E_1 в том и только том случае, когда ребро $(\varphi(u), \varphi(v))$ содержится в E_2. Отображение φ называется изоморфизмом.

Найдем некоторые необходимые условия существования изоморфизма между графами.

Пример 3. Рассмотрим следующую пару графов

Являются ли эти графы изоморфными?

Нет, для данной пары графов не существует взаимооднозначного соответствия между множествами вершин, поскольку число вершин в этих графах различно. Таким образом получаем следующее условие.

1. Число вершин в изоморфных графах одинаково.

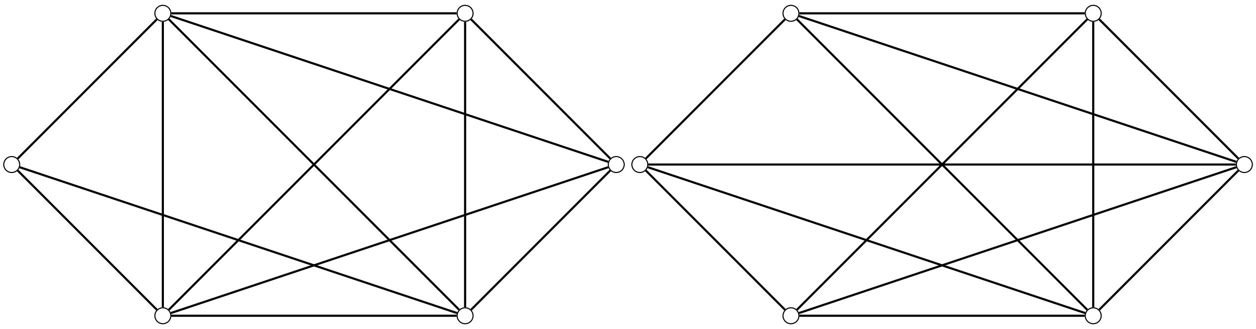
Пример 4. Рассмотрим следующую пару графов

Являются ли эти графы изоморфными?

Графы не изоморфны. Если бы графы были изоморфными, то каждому ребру первого графа можно было бы поставить в соответствие ребро второго графа, причем различным ребрам сопоставлялись бы различные. А значит, число ребер изоморфных графов должно быть одинаково.

2. Число ребер в изоморфных графах одинаково.

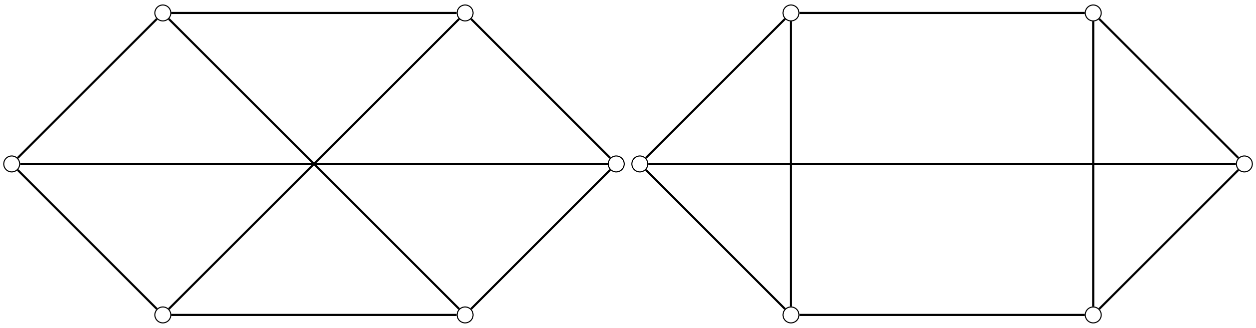
Пример 5. Рассмотрим следующую пару графов



Являются ли эти графы изоморфными?

3. Наборы степеней вершин в изоморфных графах одинаковы.

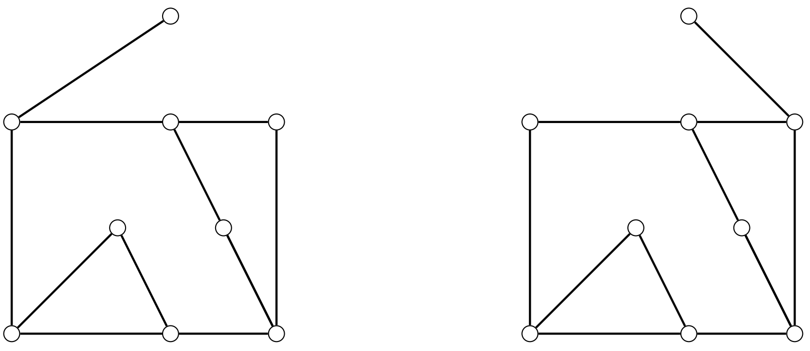
Пример 6. Рассмотрим следующую пару графов



Являются ли эти графы изоморфными?

4. Количество простых циклов длины k для всех $k = 3, 4, 5\ldots$ в изоморфных графах совпадает.

Пример 7. Рассмотрим следующую пару графов



Являются ли эти графы изоморфными?

Все перечисленные выше необходимые условия в этих графах выполняются. Однако графы не являются изоморфными. Это говорит о том, что даже выполнение всех тех условий не является достаточным для существования изоморфизма. А в данной паре графов во втором случае висячая вершина соединена с вершиной, содержащейся в простом цикле длины 4, а в первом графе вершина, с которой соединена висячая, циклу длины 4 не принадлежит.

1.2 Деревья

Неориентированный связный граф без циклов называется *деревом*.

Утверждение 1. Пусть G — конечный обыкновенный (простой) граф. Тогда следующие высказывания равносильны:

1. Граф G является деревом.
2. В графе G любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф G связен и число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф G связен, но при удалении любого ребра перестает быть связным.
5. Граф G не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф G не содержит циклов и число ребер на единицу меньше числа вершин.

Обыкновенный (простой) граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество V его вершин можно разбить на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что любое ребро e из множества E соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множесва V_2.

Утверждение 2. Дерево является двудольным графом.

Дадим полное аккуратное доказательство этого простого факта как пример того, как следует облекать в точные формулировки интуитивно понятные факты.

Доказательство. Рассмотрим дерево $G = (V, E)$. Покажем, что оно является двудольным графом.

По определению обыкновенный (простой) граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество V его вершин можно разбить на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что любое ребро e из множества E соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множесва V_2, или, другими словами, так, что никакие две вершины из одной доли не соединены ребром.

Разобьём множество V на два подмножества V_1 и V_2. Сначала зафиксируем произвольную вершину дерева $v_0 \in V$. Поскольку граф G является деревом, то для произвольной вершины v из V существует единственный путь, соединяющий вершины v_0 и v. Если длина этого пути является чётным числом, то отнесем вершину v ко множесву V_1, если же длина этого пути является нечётным числом, то отнесем вершину v ко множесву V_2. Таким образом получаем множества вершин V_1 и V_2, удовлетворяющие условиям: $V_1 \cup V_2 = V$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Покажем, что любые две вершины u_1 и u_2, соединеные ребром, лежат в разных долях множества V. Каждая из вершин u_1 и u_2 соединена с вершиной v единственным путем. Если вершины u_1 и u_2 соединены ребром, то длины путей от вершины v до верщин u_1 и u_2 отличаются ровно на 1 и, следовательно, имеют разную четность. Поэтому вершины u_1 и u_2 лежат в разных долях множества V.

Пусть $e \in E$, $e = (v_1, v_2)$, без ограничения общности будем считать, что $v_1 \in V_1$. Покажем, что $v_2 \in V_2$. Поскольку $v_1 \in V_1$, то вершины v_0 и v_1 соединяет путь чётной длины. Поскольку вершины v_1 и v_2 соединены ребром, то вершины v_0 и v_2 соединены путём нечётной длины. Поскольку G — дерево, то существует единственный путь, соединяющий вершины v_0 и v_2. Следовательно, $v_2 \in V_2$. А значит, дерево является двудольным графом. □

1.3 Универсальный подход к определению графа, о котором говорилось на лекции

Графом будем называть тройку (V, E, ρ), где $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ — конечное или счетное множество, называемое *вершинами графа*, $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ — конечное или счетное множество, называемое *ребрами графа*, а отображение ρ каждому ребру e из множества E сопоставляет элемент из множества $V_2 \cup V^2$, где V_2 — множество всех двухэлементных подмножеств множества V, а $V^2 = V \times V$ — множество всех упорядоченных пар элементов из V.

Если $\rho(e) \in V_2$, т. е. $\rho(e)$ — неупорядооченная пара $\{v_1, v_2\}$ некоторых вершин v_1 и v_2 из V, то ребро e называется *неориентированным ребром*, а вершины v_1 и v_2 — *концами* ребра e.

Если $\rho(e) \in V^2$, т. е. $\rho(e)$ — упорядооченная пара (v_1, v_2) некоторых вершин v_1 и v_2 из V, то ребро e называется *ориентированным ребром* или *дугой*, а вершины v_1 и v_2 — *началом и концом* ребра e, соотвественно. Говорят, что дуга e выходит из вершины v_1 и входит в вершину v_2.

В обоих случаях говорят, что вершины v_1 и v_2 *инцидентны* ребру e.

Если $\rho(e) = (v, v)$ для некоторой вершины $v \in V$, то ребро e называется *петлей*. Понятно, что петлю можно считать как ориентированным ребром, так и неориентированным.

Граф, в котором все ребра неориентированные, называется *неориентированным*. Граф, в котором все ребра ориенированные, называется *ориентированным*. В графе одновременнно могут быть как неориенированные ребра, так и ориентированные.

Ребра $e_1, \ldots, e_s$, $s \geq 2$, удовлетворяющие условию $\rho(e_1) = \ldots = \rho(e_s)$, называются *кратными* или *параллельными*.

Граф, в котором нет кратных рёбер и петель, называется *простым*. Неориентированный граф, в котором нет кратных рёбер и петель, называется *обыкновенным*.

Обозначим через $\deg v$ число ребер, инцидентных вершине v (при этом петли считаются дважды). Вершина v называется *изолированной*, если $\deg v = 0$. Вершина v называется *концевой* или *висячей*, если $\deg v = 0$.

В ориентированном графе через $\deg_+ v$ и $\deg_- v$ обозначим число дуг, входящих в вершину v и выходящих из нее, соответственно.

Последовательность $v_{s_1}, e_{t_1}, v_{s_2}, e_{t_2}, \ldots, v_{s_k}, e_{t_k}, v_{s_{k+1}}$, $k \geq 1$, называется *путем* от вершины v_{s_1} (начало пути) к вершине $v_{s_{k+1}}$ (конец пути) длины k, если для любого i, $i = 1, \ldots, k$, либо $\rho(e_{t_i}) = \{v_{s_i}, v_{s_{i+1}}\}$, либо $\rho(e_{t_i}) = \big(v_{s_i}, v_{s_{i+1}}\big)$.

Путь, в котором нет повторяющихся вершин, называется *цепью*.

Путь, в котором нет повторяющихся ребер и совпадает начало и конец, называется *циклом*.

Неориентированный граф, в котором любые две вершины соединены путем, называется *связным*.

1.4 Планарные графы

Граф, который можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (нигде, кроме вершин), называется *планарным*.

Изображение планарного графа на плоскости без пересечений ребер называется *плоским*.

Теорема 3 (Л. Эйлер). *Для плоского изображения планарного связного графа имеет место равенство $В - Р + Г = 2$, где $В$ — число вершин, $Р$ — число ребер, $Г$ — число граней графа.*

Полный граф на 5 вершинах и двудолный граф с мощностью обеих долей 3, в котором любые две вершины из разных долей смежны, не являются планарными.

Утверждение 4. Для плоского связного графа, содержащего хотя бы два ребра, справедливо неравенство $2Р \geq 3Г$.

Утверждение 5. Любой плоский граф содержит вершину, степень которой не больше 5.

Пусть дан плоский граф.

Такое приписывание цвета каждой вершине графа, при котором любым двум вершинам, соединенным ребром, приписаны разные цвета, называется *правильной раскрасой графа*.

Такое приписывание цвета каждой грани графа, при котором любым двум граням, граничащам хотя бы по одному ребру, приписаны разные цвета, называется *правильной раскрасой карты.*

Утверждение 6. Любой плоский граф можно правильно раскрасить 6 красками.

Утверждение 7. Любой плоский граф можно правильно раскрасить 5 красками.

Утверждение 8. Гипотеза о том, что любой плоский граф можно правильно раскрасить 4 красками равносильна гипотезе о том, что любую карту можно правильно раскрасить 4 красками.