Департамент политологии, 2017-18 уч. год
Математика и статистика, часть 1.
Задачи по теории вероятностей, часть 2 (04.12.2017)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

Для успешного освоения темы «Элементы теории вероятностей» студент должен уметь решать *все* перечисленные ниже задачи.

Теорема 1 (Теорема сложения вероятностей)**.** *Для любых двух событий A и B вероятность того, что хотя бы одно из событий произойдёт равна сумме вероятностей событий A и B минус вероятность их одновременного выполнения:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Задача 2. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — (выпало не меньше трёх орлов), событие B — (выпала хотя бы одна решка).

(a) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.
(b) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию B и найти его вероятность.
(c) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cup B$ (выполняется хотя бы одно из событий A и B) и найти его вероятность.
(d) Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A \cap B$ (оба события A и B выполняются) и найти его вероятность.
(e) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Задача 3. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — (выбрали туза), событие B — (выбрали пиковую карту).

(a) Найти вероятности событий A и B.
(b) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.
(c) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cup B$? Найти вероятность этого события.
(d) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Задача 4. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — в первый раз выпало чётное число очков. Событие B — в сумме за два подбрасывания выпало больше 5 очков.

(a) Найти вероятности событий A и B.
(b) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cap B$? Найти вероятность этого события.
(c) Какие элементарные исходы благоприятны событию $A \cup B$? Найти вероятность этого события.
(d) Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Условная вероятность

Определение 1. *Условной вероятностью* $P(A|B)$ события A при условии B называется отношение вероятности пересечения $A \cap B$ к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Задача 5. Монетку подбросили два раза. Событие A — выпадение хотя бы одной решки, событие B — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
(d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 6. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — выпадение в первый раз четвёрки, событие B — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно
(d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 7. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвёртый раз, событие B — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

(a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
(b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
(c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно.
(d) Найдите вероятность события $A \cap B$.
(e) Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 8. Газета «Комсомольская правда» писала: «новый антитабачный законопроект одобряет большинство наших экономически активных сограждан (66%).<...> Удивительно, но в поддержку запрета высказываются и многие курильщики — среди них этот показатель составил 42% (среди некурящих россиян инициативу Минздрава одобряют 75%)» (`http://www.kp.ru/daily/25964/2903066/`).

Выберем случайного человека среди экономически активных граждан. Пусть событие A — выбранный человек одобряет антитабачный закон, событие B — выбранный человек курит.

(a) Чему равно $P(A)$?
(b) Чему равно $P(A|B)$?
(c) Чему равно $P(A|\bar{B})$?
(d) Можно ли из приведённого фрагмента вычислить, чему равно $P(B|A)$?

Зависимость событий

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если вероятность того, что оба события произойдут одновременно равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Это определение эквивалентно тому факту, что вероятность каждого событий не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B, а вероятность события B равна вероятности события B при условии A:

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Теорема 9. *Вероятность пересечения событий равна произведению условной вероятности на вероятность условия:*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

Задача 10. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, то есть выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Все элементарные исходы мы считаем равновероятными. Зависимы ли события A — (выпадение орла в первый раз) и B — (выпадение орла во второй раз)?

Задача 11. Зависимы ли события A и B из задач 5–8?

Задача 12. По итогам выборов в Тилимилитрямдии стало известно, что за действующего президента в столице проголосовало 46,95% избирателей, а по всей стране его результат составил 63,6% голосов (от числа проголосовавших). Выберем случайного жителя Тилимилитрямдии из числа тех, кто голосовал на выборах. Являются ли независимыми события «этот житель проголосовал за действующего президента» и «этот житель живёт в столице»?

Задача 13. Монетку со смещенным центром тяжести подбросили два раза. Выпадение орла в первый раз и выпадение орла во второй раз будем считать независимыми событиями. При каждом подбрасывании выпадение орла считаем вдвое более вероятным, чем выпадение решки. Найти вероятности всех возможных исходов (РР, РО, ОР, ОО) в двух бросках.

Задача 14. Монетку подбросили пять раз. Выпадение орла в любой раз и выпадение орла в любой другой раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными. Нас интересует количество выпавших орлов. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, найти вероятность каждого. Как изменится ответ, если взять монетку со смещенным центром тяжести из предыдущей задачи?

Задача 15. Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки).

Задача 16. По данным опроса, 20% населения Тилимилитрямдии поддерживают политика И. И. Честного, 30% поддерживают политика А. А. Умного, причём 10% поддерживает их обоих.

(a) Сколько процентов населения поддерживает И. И. Честного, но при этом не поддерживает А. А. Умного?
(b) Сколько процентов населения поддерживает хотя бы одного из указанных двух политиков?
(c) Выбрали случайного гражданина Тиллимилитрямдии. Пусть событие A — он поддерживает И. И. Честного, событие B — он поддерживает А. А. Умного. Чему равно $P(A)$? $P(B)$? $P(A \cap B)$?
(d) Являются ли события A и B независимыми?
(e) Чему равно $P(A \cup B)$? Выполняется ли теорема сложения вероятностей?

Задача 17. В парламентских выборах участвует Партия Мира и Труда и несколько других партий. Политологи считают, что шансы Партии Мира и Труда занять больше половины мест в парламенте достаточно велики — порядка 70%. Если ей удастся это сделать, то вероятность принятия закона об уголовной ответственности за уклонение от реализации права гражданина на труд составит 80%. (Если же Партия Мира и Труда займёт меньше половины мест в парламенте, про судьбу этого закона ничего не известно.)

Какова вероятность, что произойдут оба события: Партия Мира и Труда займёт больше половины мест в парламенте и будет принят закон?

Задача 18. Каждый пятый житель поддерживает Партию Мира и Труда. Среди сторонников Партии Мира и Труда каждый третий выступает за введение трёх выходных в неделю и 4-часовой рабочий день.

Выбрали случайного жителя. Пусть событие X — «выбранный житель поддерживает Партию Мира и Труда», событие Y — «выбранный житель выступает за введение трёх выходных в неделю и 4-часовой рабочий день».

(a) Найти $P(X)$.
(b) Найти $P(Y|X)$.
(c) Найти $P(X \cap Y)$.
(d) Можно ли по данным задачи найти $P(X|Y)$? Если нет, дополнить условие задачи таким образом, чтобы эту условную вероятность можно было найти.

Задача 19. Профессор Фортран опоздает на лекцию, если не сработает будильник или если он попадёт в пробку. Вероятность того, что не сработает будильник, равна $1/100$. Вероятность попадания в пробку равна $1/5$. Образование пробки не зависит от времени выхода из дома. С какой вероятностью профессор не опоздает на занятия?

Задача 20. В некотором государстве проходят выборы в парламент по смешанной системе: часть кандидатов избирается по партийным спискам, а часть по одномандатным округам. Один и тот же кандидат может быть одновременно включен в партийный список и участвовать в выборах как одномандатник. Из 100 кандидатов от оппозиции 60 человек выдвигаются в одномандатных округах, а в партийные списки включено 80 кандидатов.

Выберем случайного кандидата от оппозиции. Пусть событие X — «выбранный кандидат выдвигается в одномандатном округе», событие Y — «выбранный кандидат включен в партийный список».

Являются ли независимыми события X и Y?

Задача 21. Для принятия решения о выделении финансирования на проект привлечено два эксперта. Один эксперт даст положительное заключение с вероятностью 80%, а другой с вероятностью 40%. Эксперты действуют независимо друг от друга. Финансирование будет выделено, если (а) оба эксперта; (б) хотя бы один из экспертов даст положительное заключение. С какой вероятностью финансирование будет выделено?

Задача 22. Фокусник во время представления утверждает, что среди зрителей есть люди с удивительной способностью к предсказаниям. Чтобы доказать это, он предлагает каждому зрителю предсказать результат пятикратного подбрасывания монетки — записать ответ на бумажку - затем он действительно подбрасывает монетку пять раз и спрашивает, кто угадал. Если никто не угадает, фокусника лишат зарплаты за выступление. С какой вероятностью фокусник лишится зарплаты, если в зале присутствует 50 человек?