Школа лингвистики, 2016-17 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Производная сложной функции (7.10.2016)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e

Задача 1. Найти производные следующих функций:

(a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$;

(b) $f(x) = \log_2 x + \arcsin x - 2\mathrm{arctg} x$

(c) $f(x) = (x-1)^2$;

(d) $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$;

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

(f) $f(x) = e^{-x}$;

(g) $f(t) = \frac{2t}{4+t^2}$;

(h) $f(x) = \mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x)$;

(i) $f(x) = \sin(2x)$;

(j) $f(x) = \sin(x + \alpha)$;

Задача 2. Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (т.е. укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

(a) $y = (x+1)^{2014}$;

(b) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2014}$;

(c) $y = \sqrt{4+3x}$;

(d) $y = \sqrt{x \sin x}$;

(e) $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$;

(f) $y = 10^{x^2}$;

(g) $y = e^{\sqrt{x}}$;

(h) $y = \arcsin(\sin x)$;

(i) $y = \ln x^2$.

Задача 3. Вычислите производные следующих функций.

(a) $y = x \ln x - x$;

(b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(c) $y = -\ln \cos x$;

(d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

(e) $y = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$;

(f) $y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a}$.

Задача 4. При выполнении некоторых условий, можно считать, что распространение слухов подчиняется следующему закону:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

где $p(t)$ — доля людей, знакомых со слухом в момент времени t, константы a и k положительны.

(a) Найти $\lim_{t\to\infty} p(t)$. Пояснить, что означает полученный ответ.

(b) Найти скорость распространения слуха.

Задача 5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ в точке $(0; 1)$.