Школа лингвистики, 2016-17 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Обратная функция. Экспонента. Логарифм (09.09.2016)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов,Р. Я. Будылин

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e. Пусть дана некоторая зависимость между двумя величинами: y и x. Например, x — радиус шара, а y — его объем. Или x — год, а y — население некоторой страны в этот год. Мы будем обозначать эту зависимость следующей записью $y = f(x)$. Другими словами, зная значение величины x мы можем однозначно найти значение величины y, задав некоторое правило. Зачастую такое правило выражается в виде некоторой формулы. Со многими такими правилами мы хорошо знакомы, например : $y = 2^x + 1$, $y = x$, $y = x^{2+7x} - \frac{1}{27}$.

Часто бывает так, что мы знаем значение функции (т.е. число y), и нам нужно найти её аргумент (т.е. число x). Например, нас интересует, в каком году население России составляло 100 миллионов человек. Иными словами, зная зависимость y от x, нам нужно найти *обратную зависимость* x от y, то есть такое выражение $g(y)$, что $g(y) = x$. Но поскольку мы знаем, что $y = f(x)$, то получается что $g(f(x)) = x$.

Если зависимость $y = f(x)$ задана некоторой формулой (некоторым выражением), задача нахождения обратной зависимости сводится к поиску выражения g, такого что $g(f(x)) = x$. Разумеется найти такую обратную зависимость не всегда возможно. Дело в том, что искомое выражение g, должно каждому значению y сопоставлять **единственное** значение x.

Задача 1. Попробуйте найти обратную зависимость для функции $y = c$, где c — некоторая фиксированная константа.

Задача 2. Найдите область определения и область значения функций:
(a) $y = x^2$;
(b) $y = |x|$;
(c) $y = |x - 1|$;
(d) $y = |x| - 1$;
(e) $y = \frac{1}{x^2}$;
(f) $y = x^4 + x^2 + 1$;
(g) (*) $y = \sqrt{4 - x^2}$.
Постройте графики и покажите, что для этих функций нет обратных на всей области определения.

Как мы можем видеть, очень многие знакомые нам функции не обладуют обратными. Проблема заключается в том, что на всей области определения функция может «склеивать точки», то есть разным значением x сопоставлять одинаковое значение y. Эта ситуация очень показательна на примере функции $y = x^2$: при $x = 1$ и $x = -1$ мы получаемм одно и тоже значение y. Как в таких случаях поступать? Первый очевидный ответ — ограничивать область определения функции. Давайте вспомним определение (арифметического) квадратного корня из числа a: квадратным корнем из *неотрицательного* числа a, называется такое *неотрицательное* число b, что $b^2 = a$. Зачем же требовать неотрицательность чисел a, b? Правильно, чтобы получить *взаимную однозначчность*. Мы ограничили функцию $y = x^2$ на полуось $x \geq 0$ и потеряли половину информации о функции, зато получили обратную функцию $y = \sqrt{x}$.

Задача 3. В предыдущих задачах, выделите области, в которых у функции будет обратная. Чему равна область определения и область значений обратной функции? Как они соотносятся с областью определения и областью значений самой функции?

Задача 4. Найдите обратные к следующим функциям:

(a) $y = x$;
(b) $y = 2x + 5$;
(c) $y = x^2$, $x \leq 0$;
(d) $y = \frac{1}{x}$;
(e) $y = 2^{3x} - 1$;
(f) $y = (3x + 1)^3$.

Задача 5. Выделить лучи на оси Ox, на которых у функции $f(x)$ есть обратная. Для каждого из найденных лучей, найти обратную функцию. Построить соответствующие графики.

(a) $f(x) = -x^2$;
(b) $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

Определение 1. Функция $f(x) = a^x$ называется *показательной* (с основанием a). Обратная к ней функция $f^{-1}(y) = \log_a y$ называется логарифмом (по основанию a). Существует такое число e, что показательная функция с основанием e обладает следующим важным свойством: её производная совпадает с ней самой: $(e^x)' = e^x$. Эта функция назвыается *экспонентой.* Логарифм по основанию e называется *натуральным логарифмом.*

Задача 6. Построить графики функций.

(a) $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$.
(b) $y = 4^x$ и $y = \log_4 x$.
(c) $y = (1/2)^x$ и $y = \log_{1/2} x$.

Задача 7. Пользуясь результатами предыдущей задачи, объясните, почему $\log_{1/a} x = -\log_a x$.

Задача 8. Бактерии удваивают свое количество каждые полчаса. Предположим, что начальное количество бактерий равно 100. Если известно, что количество бактерий равно

(a) 200,
(b) 400,
(c) 3200,
(d) произвольному числу M,

чему равно время, прошедшее от начала?

Задача 9. Вася и Маша придумывают секретный язык, в алфавите которого будут всего три буквы. Вася хочет дать уникальные имена на этом языке для каждого из своих 243 солдатиков. Чтобы ни одному солдатику не было обидно, все имена должны иметь одинаковое количество букв. Какое минимальное количество букв будет в имени каждого солдатика? А если у Васи 244 солдатика?

Дополнительные задачи

Задача 10. Пользуясь определением логарифма как обратной функции к показательной и свойствами показательной функции (свойствами операции возведения в степень), докажите, что следующие равенства

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

(b) $\log_a x^y = y \log_a x$;

(c) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

выполняются при всех a, b, x, y, при которых левая и правая части имеют смысл.