В лекции использовались материалы из книги И.А. Лаврова «Математическая логика» и из сборника Т.В. Андреевой «Дискретная математика для социологов».

1 Ещё немного о множествах

Поговорим сначала ещё немного про множества и подмножества.

Пусть A, B, C — произвольные множества. Тогда из включений $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует включение $A \subseteq C$.

Рассмотрим множество всех подмножеств какого-нибудь множества.

Пример 1a. Рассмотрим множество $\{1, 2, 3\}$. Тогда его подмножествами являются
$\varnothing$,
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$,
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$,
$\{1, 2, 3\}$.
Всего 8 подмножеств.

Пример 1b. Рассмотрим множество { Петя, Маша }. Тогда его подмножествами являются
$\varnothing$,
{Петя}, {Маша},
{Петя, Маша}.
Всего 4 подмножества.

Пример 1c. Рассмотрим множество {группа студентов 1-го курса ф-та социологии, посещающих курс дискретной математики}. Его подмножествами являются пустое множество $\varnothing$ и само множество {группа студентов 1-го курса ф-та социологии, посещающих курс дискретной математики}.
Всего 2 подмножества.

Пример 1d. Рассмотрим пустое множество. У него только одно подмножество — само пустое множество.

Таким образом у нас получилось, что в 0-элементном множестве одно подмножество, в одноэлементном — два, в двухэлементном — четыре, в трехэлементном — восемь. В самом деле, каждый элемент множества может входить или не входить в его подмножество, то есть для каждого элемента есть «два состояния». Поэтому число подмножеств множества, содержащего n элементов равно

$$\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}} = 2^n.$$

2 Размещения n предметов по k ящикам, перестановки.

Перейдем теперь к основной части лекции. Сегодня начинаем говорить о комбинаторике. Как уже отмечалось, центральной задачей комбинаторики можно считать задачу размещения объектов в соответствии со специальными правилами и нахождения числа способов, которыми это можно сделать.

Правило суммы. Если множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), и нужно выбрать один элемент из множества $A \cup B$, при этом множества A и B не содержат общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), то такой выбор можно осуществить $n + m$ способами.

Пример 2. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать старосту из группы. Тогда существует 6+15=21 способ выбрать старосту.

Правило произведения. Если множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), и нужно выбрать один элемент из множества A и один элемент из множества B, то такой выбор можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Пример 3a. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать пару «юноша и девушка» среди присутствующих. Это можно сделать $6 \cdot 15 = 90$ способами.

Пример 3b. В столовой имеется чай, кофе, компот, вода и 7 видов выпечки. Студентка собирается перекусить каким-нибудь напитком с булочкой. Она может выбрать перекус $4 \cdot 7 = 28$ способами.

Замечание. В советах «как все время одеваться по-разному при небольшом гардеробе» это правило используется постоянно (и каждый раз выдается за необыкновенное открытие). Например, если у девушки имеется 3 пары брюк, 2 юбки и 4 кофточки, то у неё имеется $(3 + 2) \cdot 4 = 20$ вариантов комплектов. А если к этому добавить пару жакетов, то число вариантов утраивается (можно пойти в одном из жакетов или без него).

Факториал. Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Обозначается $n!$. Для удобства считается, что $0! = 1$. Для любого натурального n выполняется равенство $n! = n(n-1)!$.

Неупорядоченные размещения предметов по ящикам.

Пример 4a. Пусть у нас имеются 20 различных карандашей и 7 ящиков (различных). Сколькими способами можно разложить карандаши по ящикам? Первый карандаш можно положить в любой из семи ящиков, второй — тоже в любой из семи ящиков. И так каждый карандаш можно положить в любой из семи ящиков. Таким образом получаем, что всего имеется

$$\underbrace{7 \cdot \ldots \cdot 7}_{20 \text{ раз}} = 7^{20} = 79\,792\,266\,297\,612\,001 \approx 8 \cdot 10^{16}$$

способов разместить 20 карандашей по 7 ящикам.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов и k ящиков. Тогда каждый предмет можно положить в любой из k ящиков. Следовательно, получаем, что всего имеется

$$\underbrace{k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ раз}} = k^n$$

способов разместить n предметов по k ящикам.

Пример 4b. Аналогичным образом можно посчитать, сколько существует способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов. Действительно, поскольку каждый предмет можно раскрасить в любой из k цветов, то всего существует

$$\underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{15 \text{ раз}} = 10^{15}$$

способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов.

Размещение предметов по ящикам при условии, что каждый ящик содержит ровно один предмет.

Пример 5a. Пусть у нас имеется 10 различных новогодних подарков и 15 различных подарочных пакетов. Любой подарок можно положить в любой пакет. Сколько существует способов упаковать подарки? Как и в предыдущих задачах, первый подарок можно положить в любой из 15 пакетов. Для второго подарка останется на выбор 14 пакетов. Для третьего — 13, для последнего — 6. Таким образом, существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 6 = 10\,897\,286\,400 \approx 10^{10}$ способов упаковать подарки. Используя обозначение факториала, это значение можно записать следующим образом.

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{15!}{5!}.$$

Аналогичное соотношение получим для n подарков и k пакетиков. Первый подарок можно упаковать в любой из k пакетов, второй — в любой из оставшихся $k-1$ пакетов, третий — в один из оставшихся $k-2$ пакетов,..., последний — в любой из оставшихся $k-n+1$ пакетов. Поэтому всего будет

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) = \\ = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (k-n) \cdot (k-n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(k-n) \cdot (k-n-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{k!}{(k-n)!}$$

способов упаковать подарки.

Пример 5b. В гостинице 15 одноместных номеров. Сколько способов существует расселить 5 постояльцев по этим номерам (каждый постоялец собирается жить в отдельном одноместном номере). Первого постояльца можно поселить в одну из 15 комнат, второго — в одну из 14, третьего — в одну из 13, четвертого — в одну из 12, пятого — в одну из 11. Поэтому всего существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$ способов расселить 5 постояльцев в 15 одноместных номеров.

Перестановки.

Пример 6a. На карточках написаны числа от 1 до 7. Посмотрим, сколькими способами можно выложить эти карточки в ряд. На первое место можно поместить одну из семи карточек. На второе — одну из шести,..., на предпоследнее — одну из двух, на последнее — одну оставшуюся карточку. Таким образом, всего существует $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способов выложить 7 карточек в ряд.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов. Сколькими способами можно их упорядочить (пронумеровать)? На первое место можно поместить любой из n предметов, на второе — любой из оставшихся $n-1$ предметов,..., на k-е место можно поместить любой из оставшихся $n-k+1$ предметов,..., на последнее — один оставшийся предмет. А значит, всего существует $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ способов упорядочить n различных предметов.

Пример 6b. Занятие у вас закончилось чуть раньше и никого больше в столовой нет (8 юношей, 14 девушек). Сколькими способами вы можете выстроиться в очередь? В соответствии с рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}$$

способов.

Пример 6c. А если на первое место пропустим одну из девушек? Тогда первый человек может быть выбран 14 способами, второй — 21 способом, третий — 20 способами,..., предпоследним может быть один из двух, а в конец встает оставшийся. Получаем

$$14 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 14 \cdot 21! \approx 7 \cdot 10^{20}.$$

Пример 6d. Молодые люди решили пропустить всех девушек вперед. Тогда очередь распадается на две части. Сначала упорядочиваем всех девушек 14! способами, а потом всех юношей 8! способами. Используя правило произведения получаем, что выстроить существует

$$14! \cdot 8! = 87\,178\,291\,200 \cdot 40\,320 = 3\,515\,028\,701\,000\,000 approx 3.5 \cdot 10^{15}$$

способов выстроиться в очередь таким образом.

Упорядоченное размещение n предметов по k ящикам.

Пример 7a. Посчитаем теперь способы поставить нашу группу из 22 человек другим спобом. Теперь будем выбирать не следующего человека, которого ставим в очередь, а место в очереди для следующего человека, а люди пусть у нас как-то уже занумерованы. Первого человека можем поставить к кассе и все. Второго — либо перед первым, либо после. Третьего — к кассе, между двумя предыдущими или в конец. При этом каждый следующий человек делит «свой кусочек очереди» на две части. Поэтому k-го человека можно поставить на k мест. Следовательно, и при таком способе подсчета вариантов имеем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.

Пример 7b. Пусть в столовой открылась вторая и третья кассы. Теперь первого человека можем поставить в одну из 3 касс — три способа. Второго — либо в одну из двух пустых касс, либо в кассу, где стоит первый, причем двумя способами: до или после него. Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = \\ = \frac{24!}{2!} = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000 \approx 6 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$

способов поставить 22 человека в 3 кассы.

Обобщим этот пример. Теперь мы хотим поставить n человек в k касс. Первого человека можем поставить в любую из k касс. Также как и в предыдущих случаях, Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) = \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)k(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \end{aligned}$$

способов поставить n человек в k очередей.

Пример 7c. Посчитаем, сколькими способами можно расставить 7 книг на 3 полках. В данном случае нам порядок важен, поэтому задача похожа на расстановку людей в очереди. В таком случае получаем

$$3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 9 = \frac{9!}{2} = 181\,440$$

способов расставить 7 книг на 3 полках.

Пример 8. Пусть у нас имеется 15 различных деревянных игрушек. Сколькими способами можем их раскрасить в 5 цветов (каждую игрушку красим ровно в один цвет)?

Первую игрушку можем покрасить в один из 5 цветов, вторую — тоже в один из пяти цветов, и так каждую из 15 игрушек можем покрасить в один из 5 цветов. Всего получаем

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{15} = 5^{15} = 30\,517\,578\,125 \approx 3 \cdot 10^{10}.$$

Пример 9. На полке стоит 15 различных книжек, а в сумку помещаются только 3. Сколькими способами можно взять 3 книжки с полки (в сумку)?

Предположим сначала, что расположение (порядок) книжек в сумке важен. Тогда первую книжку мы можем взять одну из 15, вторую — одну из 14, третью — одну из оставшихся 13. То есть всего $15 \cdot 14 \cdot 13$ способов. Пусть мы взяли книжки A, B, C. Если они у нас лежат в сумке «кучей», то упорядочить мы их можем $3! = 6$ способами. Значит, каждому беспорядочному набору из 3 книжек соответствует 6 упорядоченных наборов. Важно отметить, что разным неупорядоченным наборам соответствуют разные упорядоченные наборы. Число упорядоченных наборов мы знаем, поэтому получаем, что число «кучек» равно

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Обобщим эту задачу. Пусть у нас имеется n предметов, нам нужно выбрать k из них. Если бы был важен порядок предметов (например, книги на полке), то было бы $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ способов сделать выбор. Поскольку k предметов можно упорядочить $k!$ способами, то каждой неупорядоченной выборке из k предметов соответствует $k!$ упорядоченных наборов. А значит, существует $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ способов выбрать k элементов из n.

Существует два стандартных обозначения этого числа:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right).$$

Мы уже выяснили, сколько существует способов выбрать k предметов из n. Заметим, что мы также можем выбрать «остающиеся» предметы. Например, нам нужно выбрать 18 человек из 20, так проще выбрать тех 2, которые остаются, результат будет тот же самый. Наши рассуждения подтверждает следующая цепочка равенств:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Проверим ещё одно равенство:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Левая часть равенства показывает нам, сколько существует способов выбрать k предметов из n. Если мы не выбрали первый предмет, то нам нужно выбрать k предмет из $n-1$, для чего существует C_{n-1}^{k} возможностей. Если же первый предмет выбран, то из оставшихся $n-1$ предметов нужно выбрать $k-1$. Проверим то же самое, подставляя значения:

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n-k+k}{k \cdot (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Вычислим для примера

$$C_{18}^{14} = \frac{18!}{14! \cdot 4!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 9 = 3060.$$