1 Введение

В лекции использовались материалы из книги И.А. Лаврова «Математическая логика»

Дискретная математика изучает математические объекты и системы дискретного характера. Примеры таких объектов: натуральные числа, двоичные слова (битовые строки), конечные множества элементов любой природы и многое другое. Возникновение дискретной математики относится к глубокой древности. Предметом дискретной математики уже в те времена было решение трудных комбинаторно-логических задач, разработка эффективных алгоритмов выполнения арифметических действий, решение уравнений в целых числах, шифрование и дешифрование секретных сообщений. Позднее возникли важнейшие разделы дискретной математики: комбинаторный анализ, теория графов, алгебра логики, дискретная геометрия и другие.

В нашем курсе будут изучаться два раздела дискретной математики: комбинаторика и графы. Центральной задачей комбинаторики можно считать задачу размещения объектов в соответствии со специальными правилами и нахождения числа способов, которыми это можно сделать. Графы описывают связи между объектами.

Для изучения этих разделов потребуется вспомнить (или узнать), что такое множество и что с этим объектом можно делать.

2 Множества. Операции над множествами.

Понятие множества относится к первичным понятиям, так как нет других, более простых понятий для их определения. Чаще всего под этим словом подразумевается примерно то же самое, что и под словами совокупность, семейство, набор каких-либо предметов, понятий, объектов. Предметы (понятия, объекты), входящие в множество A, будут называться элементами множества A. Отметим, что множества могут быть сами элементами другого множества.

Пример 1. Множество студентов группы 131 факультета социологии НИУ ВШЭ. Элементами этого множества являются студенты. При этом сама группа, например, входит в множество групп первого курса факультета социологии.

Для выражения того факта, что некоторый элемент a принадлежит (не принадлежит) множеству A используется обозначение $a \in A$ ($a \notin A$).

Два множества A и B считаются равными, в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Обозначается $A = B$.

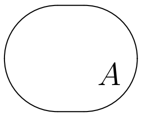
Как мы можем задавать или описывать множества? Самый простой способ - перечислением. Например,

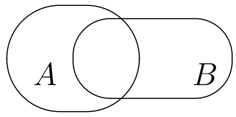
$$A = \{\text{Петя, Вася, Маша}\}.$$

Можно задавать множества описанием, например

$$A = \{\text{студенты 1 курса факультета социологии, посещающие курс дискретной математики}\}.$$

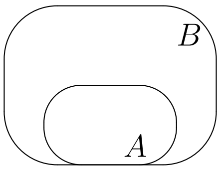
Очень полезным оказывается схематическое, графическое изображение множеств. Для множества A рисуем некоторую фигуру (которую нам удобно). Точки этой фигуры будут обозначать элементы множества A. Если необходимо рассматривать несколько множеств, то нужно нарисовать соответствующее число фигур.





Такие изображения называются кругами Эйлера или диаграммами Венна (первое понятие более общее). Они помогают наглядно представить себе взаимное расположение множеств и подсказать возможные пути решения, однако их нельзя использовать для строгих доказательств (в том числе и в решении задач недостаточно приводить лишь изображение множеств кругами Эйлера).

Подмножества. Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то A называется подмножеством множества B. Обозначается $A \subseteq B$.



Из определений ясно, что $A = B$ тогда и только тогда,когда $A \subseteq B$, $B \subseteq A$. По этой причине доказательства того, что какие-то множества равны, обычно распадаются на две части: в первой части доказывают, что $A \subseteq B$, а во второй, что $B \subseteq A$.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется пустым и обозначается через $\varnothing$. Пустое множество единственное для любых задач и описаний. Например, если мы в одном случае говорим про студентов, а в другом случае — про книги, то в обоих случаях пустое множество будет одно и то же.

Отметим некоторые свойства множеств. Пусть A — произвольное множество.

1. $\varnothing \subseteq A$.
2. если $A \subseteq \varnothing$, то $A = \varnothing$.
3. $A \subseteq A$.
4. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и не содержит никаких других элементов. Обозначается $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, элементы которого одновременно принадлежат множеству A и множеству B. Обозначается $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Обозначается $A \backslash B$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B. Обозначается $A \triangle B$.

Дополнением множества A (или отрицанием множества A) называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству A. Обозначается $\overline{A}$.

Свойства операций над множествами. Пусть A, B, C — произвольные множества.

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$.
2. $A \cap A = A \cup A = A$.
3. Если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.
4. $A \cap B = B \cap A$,$A \cup B = B \cup A$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
7. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
8. $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.