Факультет прикладной политологии, 2013-14 уч. год
Дополнительные главы алгебры и анализа: продолжение
Ряды (18 октября 2013)
И. В. Щуров, А. М. Изосимов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Задача 1. Найти 5 первых частичных сумм ряда. Изобразить их на графике. Угадать, является ли ряд сходящимся. Если да, найти сумму ряда. Если нет, объяснить, почему.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$;

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Задача 2. Определить, является ли сходящимся следующий ряд. Если является, найти его сумму.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$;

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$;

Задача 3. Допустим, вы пришли в магазин, и потратили там некоторую сумму денег на покупки. Магазин какую-то часть этих денег оставил себе в качестве прибыли (сбережений), а оставшуюся часть тоже потратил — например, закупив товар у поставщика. Поставщик, в свою очередь, часть полученных денег оставил себе, а другую часть тоже куда-то потратил, и так далее. Экономисты называют это *эффектом мультипликатора*.

Допустим, в некотором гипотетическом изолированном государстве, правительство решает потратить D рублей. Предположим, что каждый экономический агент тратит $100c\%$ и сберегает $100s\%$ от полученной суммы, при этом $c + s = 1$.

(a) Пусть S_n — общий объём денег, потраченных в результате n транзакций. Найти уравнение для S_n.

(b) Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = kD$, где $k = 1/s$. Это число называется *мультипликатором*.

Задача 4. Определить, является ли ряд сходящимся.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^3}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$;

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$.