Факультет прикладной политологии, 2013-14 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа
Семинар 8. Непрерывность функций. Теорема о промежуточном значении (11 апреля 2014)

И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов, Д. А. Филимонов, А. М. Изосимов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если существует предел $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и он равен значению функцию в этой точке, т.е. $f(a) = b$.

Определение 2. Функция называется непрерывной справа (слева), если существует предел справа (слева), и он равен значению функции в точке.

Определение 3. Функция называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка. Непрерывность на концах отрезка требуется односторонняя.

Определение 4. Функция называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Непрерывность на концах не требуется.

Задача 1. Является ли данная функция непрерывной (непрерывной слева, непрерывной справа?) в данной точке?

(a) $f(x) = x^2$, $x = 0$, $x = 1$.
(b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.
(c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.
(d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = \pi$.
(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \\ 1, & x \le 1 \end{cases}$, $x = 0$, $x = 1$.
(f) $f(x) = |x|/x$, $x = 0$.

Задача 2. Указать на каких отрезках или интервалах функция является непрерывной.

(a) $f(x) = 1/x$.
(b) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.
(c) $f(x) = 1/\cos x$.
(d) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \ge 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$

Задача 3. Построить график функции со следующими свойствами:

(a) Функция является непрерывной на интервале $(1, 2)$, но не является непрерывной на отрезке $[1, 2]$.
(b) Функция является непрерывной на отрезке $[1, 2]$, но не является непрерывной на отрезке $[0, 3]$.
(c) Функция является непрерывной на интервале $(1, 2)$, у неё имеется конечный левый предел в точке $x = 2$ и бесконечный правый предел в точке $x = 1$.

(d) Функция является непрерывной на интервалах $(1, 2)$ и $(2, 3)$, но не является непрерывной на интервале $(1, 3)$, причём у неё имеются односторонние пределы в точке 2 (правый и левый).

Теорема 4. *Пусть функция f является непрерывной на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим произвольное значение y_0, лежащее на отрезке $[f(a), f(b)]$ (то есть между значениями функции в концах отрезка; если $f(a) < f(b)$, то y_0 следует выбирать на отрезке $[f(b), f(a)]$). Тогда обязательно найдётся такое значение $x = x_0$ (может быть, не единственное), что $f(x_0) = y_0$. Иными словами, функция $f(x)$ принимает все свои промежуточные значения.*

Задача 5. С помощью теоремы о промежуточном значении, доказать, что у следующих уравнений есть хотя бы один корень. Указать какой-нибудь отрезок, на котором лежит этот корень.

(a) $x^3 + 100x + 25 = 0$;
(b) $\cos x = x^3$