Факультет прикладной политологии, 2013-14 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа
Предел функции (21 февраля 2014)

И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов, Д. А. Филимонов, А. М. Изосимов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Задача 1. Построить график функции $y = f(x)$.

(a)
$$f(x) = |x-2|;$$

(b)
$$f(x) = \frac{|x|}{x};$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases};$$

(d)
$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 0 \\ \frac{1-x^2}{1-x}, & x>0 \end{cases};$$

Пользуясь построенными графиками, найти пределы $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. В пункте 1a найти также $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$. В пункте 1d, найдите также $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Напомним правила вычисления пределов. Следующие равенства справедливы в случае, если все входящие в них пределы существуют и конечны. Равенства остаются верными, если a — бесконечность (плюс бесконечность, минус бесконечность), а также если все рассматриваемые пределы — односторонние (предел справа или предел слева).

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = (\lim\limits_{x\to a} f(x)) \cdot (\lim\limits_{x\to a} g(x))$.
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} c = c$, где c — константа (не зависящая от x).
- $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, n — натуральное число.
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, n — натуральное число.
- $\lim\limits_{x\to a} b^x = b^a$, $b>0$.

Задача 2. Пользуясь выписанными правилами, найти следующие пределы.

(a) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$;

(b) $\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{16-x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$;

(e) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$;

(f) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$;

(g) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{1/4+1/x}{4+x}$;

(h) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$;

Задача 3. Найти следующие пределы.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x-3}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$; (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Задача 4. Найти предел, если он существует. Если не существует, объяснить, почему.

(a) $\lim\limits_{x\to3}(2x+|x-3|)$; (b) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$; (c) $\lim\limits_{x\to0,5^-}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$.

Дополнительные задачи

Рассмотрим *геометрическую прогрессию* со знаменателем q, то есть последовательность чисел, у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на q. Если $0<q<1$, такая последовательность будет убывать, поскольку каждый следующий член меньше предыдущего (при умножении на число, меньшее 1, числа уменьшаются). Пусть a_n — это n-й член последовательности, $a_1=c$. Тогда $a_2=cq$, $a_3=cq^2$, $a_4=cq^3$ и т.д. Вообще, $a_n=cq^{n-1}$ (использована степень $(n-1)$, а не n, потому что счёт начался с нуля, первому члену соответствует нулевая степень).

Пусть S_n — сумма первых n членов последовательности, то есть $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Например, $S_1=a_1=c$, $S_2=a_1+a_2=c+cq$, $S_3=a_1+a_2+a_3=c+cq+cq^2$ и т.д.

Задача 5. Доказать, что $S_n=c\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Указание. Пусть

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=c+cq+\ldots+cq^{n-1} \tag{1}$$

Тогда можно рассмотреть число qS_n, домножив правую часть равенства (1) на q. Получим выражение, которое очень похоже на S_n, и отличается только некоторыми слагаемыми. Исходя из этого, можно записать уравнение на S_n и решить его.

Задача 6. Известно, что $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ если $0<q<1$. Найти $\lim_{n\to\infty}S_n$, если S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом c и знаменателем q.