Факультет прикладной политологии, 2013-14 уч. год
Доп. главы алгебры и анализа
Семинар 2. Обратная функция. Логарифм (24 января 2014)

И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов, Д. А. Филимонов, А. М. Изосимов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e.

Пусть дана некоторая зависимость между двумя величинами: y и x. Например, x — радиус шара, а y — его объем. Или x — год, а y — население некоторой страны в этот год. Мы будем обозначать эту зависимость следующей записью $y = f(x)$. Другими словами, зная значение величины x мы можем однозначно найти значение величины y, задав некоторое правило. Зачастую такое правило выражается в виде некоторой формулы. Со многими такими правилами мы хорошо знакомы, например : $y = 2^x + 1$, $y = x$, $y = x^{2+7x} - \frac{1}{27}$.

Часто бывает так, что мы знаем значение функции (т.е. число y), и нам нужно найти её аргумент (т.е. число x). Например, нас интересует, в каком году население России составляло 100 миллионов человек. Иными словами, зная зависимость y от x, нам нужно найти *обратную зависимость* x от y, то есть такое выражение $g(y)$, что $g(y) = x$. Но поскольку мы знаем, что $y = f(x)$, то получается что $g(f(x)) = x$.

Если зависимость $y = f(x)$ задана некоторой формулой (некоторым выражением), задача нахождения обратной зависимости сводится к поиску выражения g, такого что $g(f(x)) = x$. Разумеется найти такую обратную зависимость не всегда возможно. Дело в том, что искомое выражение g, должно каждому значению y сопоставлять **единственное** значение x.

Задача 1. Попробуйте найти обратную зависимость для функции $y = c$, где c — некоторая фиксированная константа.

Задача 2. Найдите область определения и область значения функций:
(a) $y = x^2$;
(b) $y = |x|$;
(c) $y = |x - 1|$;
(d) $y = |x| - 1$;
(e) $y = \frac{1}{|x|}$;
(f) $y = x^4 + x^2 + 1$;
(g) $y = \sqrt{4|x| - 1}$.
Постройте графики и покажите, что для этих функций нет обратных на всей области определения.

Как мы можем видеть, очень многие знакомые нам функции не обладуют обратными. Проблема заключается в том, что на всей области определения функция может «склеивать точки», то есть разным значением x сопоставлять одинаковое значение y. Эта ситуация очень показательна на примере функции $y = x^2$: при $x = 1$ и $x = -1$ мы получаемм одно и тоже значение y. Как в таких случаях поступать? Первый очевидный ответ — ограничивать область определения функции. Давайте вспомним определение (арифметического) квадратного корня из числа a: квадратным корнем из *неотрицательного* числа a, называется такое *неотрицательное* число b, что $b^2 = a$. Зачем же требовать неотрицательность чисел a, b? Правильно, чтобы получить *взаимную однозначность*. Мы ограничили функцию $y = x^2$ на полуось $x \geq 0$ и потеряли половину информации о функции, зато получили обратную функцию $y = \sqrt{x}$.

Задача 3. В предыдущих задачах, выделите области, в которых у функции будет обратная.

Задача 4. Найдите обратные к следующим функциям:

(a) $y = x$;
(b) $y = 2x + 5$;
(c) $y = x^2$, $x \leq 0$;
(d) $y = \frac{1}{x}$;
(e) $y = 2^{3x} - 1$;
(f) $y = (3x + 1)^3$.

Задача 5. Выделить лучи на оси Ox, на которых у функции $f(x)$ есть обратная. Для каждого из найденных лучей, найти обратную функцию. Построить соответствующие графики.

(a) $f(x) = -x^2$;
(b) $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

Задача 6. Длина окружности, площадь круга, объем шара — это функции от их радиусов. Найдите их обратные.

Задача 7. Известно, что за время t, цена акций увеличивается по закону $f(t) = 2^{2t} + 1$. То есть, в начале отсчета при $t = 0$, одна акция стоила 2 рубля, через день стоимость была уже 5 рублей, еще через день уже 17 рублей и так далее. Постройте график зависимости цены акций от времени. Найдите обратную зависимость. Постройте график.

Задача 8. Бактерии удваивают свое количество каждые полчаса. Предположим, что начальное количество бактерий равно 100. Если известно, что количество бактерий равно

(a) 200,
(b) 400,
(c) 3200,
(d) произвольному числу M,

чему равно время, прошедшее от начала?

Задача 9. Вы положили 100 рублей на счет под 20% годовых (сложные проценты). Через сколько лет на вашем счету будет

(a) 100 рублей?
(b) 120 рублей?
(c) 144 рубля?
(d) 207 рублей 36 копеек?
(e) x рублей?

Дополнительные задачи

Задача 10. Пользуясь определением логарифма как обратной функции к показательной и свойствами показательной функции (свойствами операции возведения в степень), докажите, что следующие равенства

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
(b) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

выполняются при всех a, b, x, y, при которых левая и правая части имеют смысл.

Определение 1. Точки A и B называются симметричными относительно прямой l, если отрезок, концами которого являются эти точки, пересекает прямую l под пряым углом, в точке C, которая делит его пополам (то есть $AC = BC$).

Задача 11. Доказать, что точки (x, y) и (y, x) являются симметричными относительно прямой $y = x$.